# EDIZIONE NAZIONALE

# MATHEMATICA ITALIANA

per il Ministero per i Beni e le Attività Culturali

[illegible]

[illegible]

Manfredi

Conso

Dogmatic

# DE CONSTRUCTIONE ÆQUATIONUM DIFFERENTIALIUM PRIMI GRADUS

*AUTHORE*

GABRIELE MANFREDIO

PHILOSOPHIÆ DOCTORE BONONIENSI

Philoſophicæ, quæ in Patria, eſt Academiæ
Socio Ordinario.

---

ILLUSTRISSIMO atque AMPLISSIMO

BONONIENSI SENATUI.

BONONIÆ MDCCVII.

Typis Conſtantini Piſarii. Superiorum permiſsu.

## *Illuſtriſſimi, atque Ampliſſimi* PATRES.

MAgna eſt, Illuſtriſſimi, atque Ampliſſimi PATRES, quam bonarum artium præſidio, & augmento conferre ſoletis non cura modo, & vigilantia, ſed & utilis atque opportuna opera, & efficax auxilium. Florentiſſimam nempè hac in Urbe Academiam habetis, Veſtraque ſuſtinetis munificentia, quam unicè placendi Vobis viam concivibus Veſtris intento veluti digito PATRES prudentiſsimi monſtratis, & dulce ſimùl incitamentum præmii ſpem additis, & præmium ipſum, ſola meritorum ratione attenta, identidèm indulgetis; Quo ipſo, & nobis virtutum ſtudia incenditis,& vetus doctiſſimę Civitatis nomen ſervatis, & maximam apud exteras ipſas nationes gratiam initis,cum clariſſimos ex Veſtro hoc Lyceo Viros promitis, & per ipſas rogati ſpargitis, & elargimini; ut ea quibus noſtra hæc ſecula abundant Scientiarum incrementa, Vos etiam, Veſtrumque hoc Athenæum non ultimum quaſi fontem agnoſcant. Qua propter id nobis, quibus hac in Urbe naſci, Veſtroque, Illuſtriſſimi, ac Ampliſſimi VIRI, benefitio meliores inter Scientias educari contigit grati animi iniungit officium, ut generoſam Indolis Veſtræ magnitudinem prædicemus, & Veſtrum eſſe quidquid hac in Urbe à doctiſsimis, quos Vos ipſi aſsignatis Præceptoribus noſtris didicimus, unanimiter fateamur. Atque id quidem in primis, quod Opuſculo huic materiam facit omni titulo Veſtrum eſſe nemo inficiabitur; eſt enìm hæc ipſa Ars, quam hìc primùm à rudimentis, ac à prima

vc-veluti fœtura excitavit Celeberrimus P. Bonaventura Cavallerius, quem Vos ipſi maxima, qua ſoletis conſilii maturitate ad Vos accerſiſtis, atque accerſitum impenſa Liberalitate foviſtis, Veſtrumque effeciſtis. Crevit illa deinde, & ad exteros migravit; unde iam, mutato non tantum nomine, ſed & Analyticam induta ſpetiem, & quantum in melius converſa! Italiæ nunc primùm Veſtrum precata patrocinium ſe denuò redux committit tenui hoc liberculo excepta, qui primus in omni Italia Analyſim hanc ex profeſſo traditurus prodit, atque vulgatur. Dum igitùr Ampliſſimo Veſtrorum Cœtui hoc qualecumque ſtudiorum ſpecimen, quæ Veſtro hoc in Gymnaſio renovantur humillimè exhibeo, non quidem quaſi quidquam Vobis largiturum me ſiſto, ſed quod unicè Veſtrum eſt tandem Vobis ipſis redditurus accedo, nec niſi timidus, oblatæ ſcilicet rei tenuitate perſpecta. Nec tamen id mihi minorem fiduciam facit, fore ſiquidem ut benigno aſpiciatis Vultu opuſculum, quo Veſtrum imploro auctorabile patro-

ci-

cinium; ea nempe estis Clementia, ut quæ passìm Vestro firmanda præsidio hoc de Lyceo ad Vos quotidiè confluunt tamquam si Vestra non essent humanissimè excipiatis, at quasi non Vestra modo, sed & Vestrum pars etiam forent potentissima protectione tueamini. Hanc operi huic, hanc mihi ipsi, PATRES Illustrissimi, atque Amplissimi exopto, & supplex posco, & confido etiam, tanto me auctum auspicio majora, & Vestro digniora nomine, & multa, qua Vos veneror observantia in dies daturum. Deus Optimus Maximus servet Vos diù Illustrissimi VIRI, & Amplissimi PATRES, fęlici Scientiarum progressui, Urbisque fausto Regimini natos

DD. VV. Illustriss.rum, atq; Ampliss.rum

Bononiæ Kal. Ianuar. 1707.

*Humillimus Devotissimus, atq; Addictissimus Servus, & Cliens*

Gabriel Manfredi.

# *PRÆFATIO.*

*TRadimus in hoc opusculo Constructionem Æquationum Differentialium primi Gradus ex collectis, & in ordinem dispositis, & analyticè demonstratis speciminibus, quæ clarissimi nostro hoc ævo geometræ in libris sparsim, nullo quidem ordine, nullave methodi ratione habita, prout passim invenerunt publico sunt elargiti. Ac ne quidem totam hanc funditus materiam exhaustam esse speramus, est enim illa, non viribus modò nostris, quas infirmas admodum fatemur, adhuc imperuia, sed quantum huc usque constet, incompleta adhuc, & mutila, ut hac de re tractatum absolutissimum ex iis, quæ ad nos usque pervenerunt inventis frustrà desideres. At verò, cum plura tamen extent à recentioribus ad methodi saltem exordium conscripta, eaque non quidem ordinatim, & ad unum quasi finem collimantia, sed solo inventionis ordine servato in Literatorum diariis, quæ quotidiè vulgantur diligentissimè inserta sint, ac præcipuè in actis Eruditorum, quæ Lipsiæ accuratissimi collectores imprimunt, ac in actis Regiæ Scientiarum Academiæ, ac alibì prostent, fas erat, ut hæc omnia clarissimorum virorum Schediasmata novam omninò artem claudentia, & ferè exemplis plusquam regulis indicantia in ordinem revocarentur, & ab occultis Analyticis fontibus immediatè derivarentur, ut si methodum completam non suppeditent, id saltèm quod continent, quod nec modicum est, nec inutile, præ oculis poneretur, ad commodiorem facilitatem deduceretur, atque ingens labor ijs demeretur,*

*retur, quibus hæc cordi ſunt, quem generaliorum regularum conjecturæ, & deductiones per preſſa ut plurimum exempla particularia injungunt, atque præſeferunt; dum interim Clariſſimi in hoc calculo primi inventoris Leibnitzij opus de ſcientia Infiniti, quo id totum pro re nata à principijs uſque dilucidetur expectamus, atq; otium tanto, tamq; utili operi neceſſarium apprecamur.*

*Libellus itaque noſter Clariſs. Marchionis Hoſpitalii celeberrimum opus de Infitè Parvis excipiet, non quidem quaſi ab illo ſecundus haberi poſſit, qui tanto diſcriminis intervallo ab illo degreditur, ſed quod poſt calculi differentialis fundamenta ibi dilucide adeò perſpecta integralis calculus, de quo hic tractatio qualiſcumque inſtituitur Geometriæ curſum peragenti ſe ſiſtat. Sicuti enim ſeriei cujuſvis quantitatum continuè fluentium, hoc eſt variabilium, ſivè illæ ſint cujuſvis Curvæ ordinatæ, ſivè quævis alia ſeries aſſignatur per differentialem calculum fluxio, hoc eſt minimi incrementi quantitas, ſic viciſsim in noſtro calculo integrali, data fluxione, ſivè differentiali quantitate invenitur quantitas, cui competat, atque indè quadraturæ ſpatiorum, rectificationes curvarum, cubaturæ ſolidorum, ſuperficierumque complanationes derivantur, ſed & Curvarum innumerabilium, ex data Tangentium conditione, & quamplurimis alijs proprietatibus deſcriptiones efficiuntur, quas calculi integralis expertibus nullatenus in poteſtate eſſe crediderim. Neque ideò opuſculum in ordine ad uſus integralis calculi in his præſtandis diſpoſuimus, Clariſs. Hoſpitalium imitati, qui varias laudati operis ſui ſectiones per diverſos differentialis calculi uſus diſtinguit, tùm, quod id non ità pridèm Clariſs. Carrè egregie omninò in opere ſuo præſtiterit, cum verò, quod multa ad integralem calculum pertinen-*

*tia, qualis est redductio æquationum differentialium, & alia huiusmodi commodiùs in ordinem venire viderim si totum opus ad earundem differentialium æquationum constructionem referendo dirigerem. Illud propterea in VI. omninò Sectiones partitus sum. Prima viam ostendit, qua ex datis quæsitæ alicuius curvæ proprietatibus nonnullis ad æquationem illius differentialem perveniri possit; neque enim de illis ordienda erat dissertatio, nisi prius ratione qua ad illas quandoque perducamur satis perpensa. Postquam verò ad talem æquationem perducti fuerimus, siquidem algebraicè fuerit integrabilis ad secundam pertinet Sectionem, quò spectat quidquid de spatijs algebraicè quadrabilibus, curvis rectificabilibus &c. huc usque sit proditum. Si verò æquatio algebraicè non sit integrabilis, vel unicam tantum indeterminatarum, vel ambas (præter utriusq; differentiale, quod in omni æquatione differentiali haberi necessum est) continebit. Tertia Sectio considerat ex illis, quæ unicam tantùm habent indeterminatam illas tantummodò in quibus differentialia primam dimensionem non superant; quarta verò illas, in quibus differentialia ad quamvis potestatem sint elevata. Quinta porrò æquationes construit, quæ utramq; indeterminatam cum habeant, separabiles illæ tamen ab invicem existunt. Sexta demùm varias ex illis prosequitur, quæ suas sic sibi mutuò implicitas indeterminatarum expressiones sortiuntur, ut multo opus sit artificio ad earum separationem instituendam, & constructionem ex inde geometricè derivandam.*

*Atque hoc quidem id totum est, quod præsenti opusculo peragitur, quo sane integralis calculi prima tantum rudimenta adumbrare præsumimus, hunc porrò in finem, ut si quis post* *differentialem ulteriùs pergere, & hanc analysim intrinsecùs perlustrare velit, facem veluti præferamus, & prima saltèm pandamus vestibula, quod novam scientiam ingressuro nullius omninò usus esse non poterit. Speramus etenìm postquam ea ritè intellecta fuerint, quæ principijs necessaria judicantes ex actis Lipsiensibus explicanda selegimus ad reliqua etiam Æquationes differentiales primi gradus respicientia, quæ inexplicata reliquimus stratam fore viam, vel certè superabilem, neque enìm omnia, quæ in actis extant prosequi vel opportunum erat, vel etiam possibile, quandoquidem nova, & nova quotidiè vulgantur, nec omnia finito hoc, & terminum habente opusculo claudi possent. Quìn & à quo vulgando liberculo insistimus acta Annorum 1702., 1703. ad nos pervenerunt, ac in illis Schediasmata Leibnitziana Mensium Maii, & Ianuarii, quæ quidem scientiam latè promovent, & sola Opusculo sufficientem materiam præbere poßent. At nobis, quibus brevitati parendum erat, & iam totius opusculi textura erat absoluta ab his fuit abstinendum, ut & à quamplurimis, ea tantùm attigisse contenti, quæ Tyronibus primam lucem inducere possint, quorum tantum gratia labor hic est institutus.*

*Usum porrò calculi quod attinet, is sanè ingens est, & ad omnes Matheseos partes, maximo illarum incremento protenditur. Est enìm universa Analysis nil aliud, quam ipsa genuina, & infallibilis veritatis inveniendæ methodus, quam adeò si Mechanicis, Staticis, Nauticis, Astronomicis, cæterisque Mathematicis usibus applices, innumeram veritatum segetem colliges. Atque hinc tot recentiorum Geometrarum*

in

*in ipsis etiam Physico-mathematicis tractatibus inventa derivantur, quæ nostrum hoc seculum præ cæteris scientiarum, artiumque incremento insigne efficiunt. Hinc Horologiorum æquabilitas, elaterum & catenarum curvitas, navium opportunissima constructio, aquarum per cujusvis figuræ foramina fluentium determinatio, orbium planetarum exactissima inventio, & plurima ad humanos usus perquam necessaria derivantur. Nos certè materiam humanis civilibusque usibus accomodatam hic tradituros adeò non diffidimus, ut Philosophicæ quam hic Bononiæ in Ædibus Domini Com. Marsigli habemus Academiæ, rem minimè inutilem oblaturos speremus, & curæ qua Dominus ipse Comes studia Philosophica impensè, & generosè fovet, & qua Doctissimi Coacademici ea quotidie augere student, quid opportunum pro instituti nostri ratione collaturos existimemus. Sed & illud in primis omni utilitate majus emolumentum accedit, ut recta ratiocinandi methodo, & continua in id, quod agitur animi adversione, Intellectus maturiori assuescat discursus rationi, neque jàm, aut verbis, aut fallacibus moveatur coniecturis, sed veræ rationis vim, & robur ubique expetat, atque requirat. Quod quantæ sit utilitatis, & fructus non in Geometriæ tantum, sed & in omni civilis vitæ commercio nemo sanè non videt.*

*Illud tandem hìc iterùm, atque iterùm testatum volumus, opusculum hoc qualecumque aliorum penitùs cogitatis refertum illis omninò adscribendum esse, & tribuendum. Debentur enìm omnia celeberrimorum Leibnitzij, Bernoulliorum Fratrum, Hospitàlii, Varignonii, & P. Grandi in-*

*Pisano Lyceo professoris egregij ingeniosissimis inventis, vel ex Libris erutis, vel per Literas nobiscum humanissimè communicatis. Ordinem nos addidimus, & Analysim ubi de illa deesset, ad eorum utilitatem, qui in hisce mirabilibus Geometriæ arcanis experiri se volent adiunximus, aliàs fortassè nonnulla, quæ huius calculi interiora respiciunt, quæque indigesta adhuc versamus, favente Deo, publici juris facturi.*

# SECTIO PRIMA.

*Quomodo ex datis quæsitæ alicujus Lineæ proprietatibus nonnullis, ad æquationem illius Curvæ differentialem possit perveniri.*

## *DEFINITIONES.*

### *Prima Definitio.*

1 QUantitatem quamvis p dari per aliam, vel alias quasvis x, z, &c. nil aliud est, quam notum esse quomodo, data hac, vel his x, z, &c. ad cognitionem illius debeat procedi. Hinc si ex datis quantitatibus x, z, &c. quantitas p nota fieri possit ope lineæ determinati generis, vel æquationis determinati gradus, dicetur p dari per x, z, &c. algebraicè. Sin minus, dicetur dari tantùm transcendenter. Sic $x^3 - axx$, datur per x, & a algebraicè. Peripheria verò Circuli datur per Radium tantùm transcendenter.

### *Secunde Definitio.*

2 QUantitatem verò quamvis h; sic dari per aliam quamvis k, ut tertia quæcunque l

datur

datur per quartam m, idem eſt, ac eodem modo ex ſecunda k deveniri in cognitionem primæ h,quo ex quarta m devenitur in cognitionem tertiæ l. Vel clariùs; ſi ſint quatuor quantitates h, k, l, m, tales ut in prioris h valore, loco literæ k ſubſtituendo m, prodeat l, dicetur tunc h ſic dari per k, ut l datur per m; exemplum ſunto $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$, x, $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$, y, quæ quatuor quantitates tales ſunt, ut in priori, ſi loco ſecundæ x ſubſtituatur quarta y, prodibit tertia $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ dicetur igitùr $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ ſic dari per x, ut $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ datur per y. Nuncque clarius intelligitur prima definitionis hujus expoſitio; patet enim, quod ex litera x devenitur in cognitionem quantitatis $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ eodem modo, quo ex litera y devenitur in cognitionem quantitatis $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$, ſivè quantitas $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ ſic componitur ex x, ut $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ componitur ex y, quia ut data x innoteſcat $\frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$ eadem operatio, tam geometrica, quam arithmetica eſt inſtituenda, quæ & inſtitui debet ut cognita y ad quantitatis $\frac{ay}{\sqrt{aa+yy}}$ cognitionem deveniamus.

De-

*Definitio tertia.*

3 ÆQuatio differentialis primi gradus pro aliqua Linea, sive alicujus Lineæ est ęquatio exprimens relationem quam habent ad invicem prima differentialia coordinatarum illius Lineæ. Nomine verò coordinatarum intelligo duas indeterminatas datæ naturæ, quarum data sit positio ad singula quæsitæ Lineæ puncta sufficienter determinanda. Sic $adx - 2ydy = 0$ est æquatio differētialis primi gradus pro parabola communi, quia exprimit relationem differentialium dx, dy linearum x, & y, quas summimus pro rectis se invicem in angulo recto decussantibus ut in Cartesiana Analysi moris est; Verùm eadem $adx - 2ydy = 0$ non esset ęquatio differentialis pro curva exempli gratia, cujus y quidem esset ordinata, x verò esset subtangens, quia ordinata & subtangens non sunt duæ coordinatæ pro curva describenda, cum data etiam earum longitudine non innotescat positio ipsarum, quò quæsitæ Lineæ puncta sufficienter determinentur.

4 Adverto tantùm, quod hæc differentialia coordinatarum, in omni æquationis differentialis membro eundem habitura sint numerum dimensionum, ut si in uno membro adfuerit $dx^3$; in aliis aderit quidem aut $dy^3$, aut $dx^2\,dy$, aut $dxdy^2$, sed nullibì aderit $dy^2$ tantum, vel dy, vel dydx; uno verbo nullum aderit in æquatione membrum in quo dif-

fe-

ferentialia eundem dimenſionum numerum ſimul ſumpta non efficiant. Ratio evidens eſt ex eo, quod membrum in quo quantitates differentiales majorem numerum dimenſionum ſortirentur, tutò deleri poſſet ex æquatione, eſſet enim cæteris infinitè minus, ac proinde nil adderet illis. Hæc ſatis nota ſunt, nec aliquid novi tradimus, undè ad rem properantes aggrediamur modum, quo hæ differẽtiales æquationes ex datis quibuſdam proprietatibus Linearum ſint eruendæ.

### *Prop. prima.*

Fig. 1. SI detur æquatio exprimens relationem BT ſubtangentis deſcribendæ curvæ AD, in axe AB, aut ſubnormalis BC, aut tangentis DT, aut normalis DC, ad coordinatas AB, BD, & conſtantes quaſvis, aut ad quantitates, quæ per coordinatas, & conſtantes quomodocumq; dentur; invenire æquationem differentialẽ primi gradus curvæ deſcribendæ.

5 Quoniam valor ſubtangentis BT in omni curva cujus axis ſit Linea recta (vocando abſciſſas $AB = x$ quæ ſcilicet in axe ſummuntur, & ordinatas $BD = y$) eſt $\frac{ydx}{dy} = s$, & $BC = \frac{ydy}{dx} = r$, & $DT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy} = t$, & $DC = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = n$ opus erit tantùm hos valores ſubſtituere in locis Literarum s, t, r, n in æquatio-

tione data exprimente relationem harum Linearum ad coordinatas, vel ad quantitates, quę per coordinatas, & constantes quomodocumque dantur, & æquatio resultans erit manifestè æquatio differentialis primi gradus curvæ quæsitæ.

## *COROLL.*

6 MAnifestum est etiam talem æquationem differentialem inventum iri si data æquatio non Literas tantum s, t, r, n, cum coordinatis, & constantibus, sed & alias harum loco, vel cum illis contineret, quarum valores assignabiles sint in terminis quomodocumque per dx, dy, & coordinatas, & constantes affectis, quales sunt innumeræ, ut AG perpendicularis à vertice ad tangentem (cujus valor est $\frac{ydx-xdy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$) AH perpendicularis per verticem ad normalé DC (quæ exprimitur $= \frac{ydy+xdx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$) intercepta AE inter tangentem, & verticem in axe conjugato (quæ est $= \frac{ydx-xdy}{dx}$) & complures aliæ functiones (ut vocant) ipsius curvæ, quæ ex tangentis determinatione cum dependeant, differentialia dx, & dy in suis valoribus pręseferunt. Nemini puto remoram faciet horum valorum inventio pro Lineis AG, AH, AE. AG eruitur ex triangulorum similium TBD,

TAG analògia TD, DB :: TA, AG. Similiter AH, est quarta post CT, TD :: CA, propter similia CTD, CAH. Tandèm AE habebitur si fiat TB, BD :: TA, ad quartam, quia similia sunt triangula TBD, TAE.

## COROLL. II.

7 SI in Æquatione data exprimente relationem Linearum s, t, r, n aut similium, quas præced. Coroll. consideravimus ad constantes, & coordinatas, vel ad quantitates, quæ per constantes, & coordinatas quomodocumque dentur, adessent differentialia ds, dt, dr, &c. est manifestum, ęquationem quæ oriretur substitutis pro s, t, r, &c. earum valoribus & pro ds, dt, dr, &c. earum valoribus differentialibus, fore æquationem differentialem quidem, sed non primi gradus, quia ds, dt, dr, &c. includunt differentialia secunda ddx, ddy. Debet igitùr data ęquatio esse Algebraica, saltem quo ad lineas t, s, r, &c. ut differentialis æquatio quæsita sit primi gradus, secùs fiet altiorum graduum; de æquationibus verò differentialibus secundi, aut altiorum ordinum agere non est animus.

### *Exemplum.*

8 SIt æquatio r, s, t, n, $= a^4$, productum nempè quatuor Linearum, BC, BT, TD, DC, debeat esse

esse in omni quæsitę Lineæ puncto eadem constans $a^4$. Substitutis ergò pro r,s,t,n, earum valoribus supra assignatis fiet ęquatio $y^4 dy^2 + y^4 dx^2 = a^4 dxdy$, (num 5) quę est æquatio differentialis curvę quęsitæ. Sanè si quęras hujus lineę subtangentem ex data hac ęquatione differentiali juxtà methodum vulgatam invenies illam $x = \frac{2y^5}{a^4 + \sqrt{a^8 - 4y^8}}$. Erit igitùr tangens $\frac{aay\sqrt{2}}{\sqrt{a^4 + \sqrt{a^8 - 4y^8}}}$ Subnormalis verò erit $\frac{a^4 + \sqrt{a^8 - 4y^8}}{2y^3}$, & normalis $= \frac{aa\sqrt{a^4 + \sqrt{a^8 - 4y^8}}}{y^3\sqrt{2}}$, quarum quatuor linearum productum est $a^4$ prorsus ut debuerat.

*Exemplum II.*

9 SI fuerit ęquatio $r + x = \sqrt{xx + yy}$, ità ut triangulum ACD debeat semper esse Isosceles, & ejus latera AD, AC ęqualia, differentialis ęquatio erit (substituto $\frac{ydy}{dx}$ pro quantitate r) $\frac{ydy}{dx} + x = \sqrt{xx + yy}$ unde $ydy = dx\sqrt{xx + yy} - xdx$. Si velis r ęquari ipsi EA, erit $\frac{ydx - xdy}{dx} = \frac{ydy}{dx}$ sivè $ydx - xdy = ydy$.

## *Exemplum III.*

(num. 5) 10 SI debeat $t + n$ esse $= a$, substitutis pro $t$, & $n$, earum valoribus $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, & $\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, erit (demptis irrationalibus) æquatio quæsita $yydx^4 + 2yydx^2dy^2 + yydy^4 + 2yydx^3dy + 2yydy^3dx = aady^2dx^2$. Eâdem regula si velis æquationem differentialem curvæ in qua $tt + nn + yy = aa$ erit illa $yydx^4 + yydy^4 + 3yydx^2dy^2 = aady^2dx^2$. Si porrò debeat esse DE, ad EA, in ratione constanti $p$ ad $q$, invento valore lineæ ED, ex triangulo EFD rectangulo, qui erit $\frac{x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, erit analogia $\frac{x\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, $\frac{ydx - xdy}{dx} :: p, q$, undè æquatio ab omni signo radicali explicita erit $ppyydx^2 + ppxxdy^2 - 2ppyxdxdy = qqxxdx^2 + qqxxdy^2$.

## *Exemplum IV.*

11 SI jubeatur esse in quæsita curva $s^m, x^n :: a^m, b^n$, fiet æquatio $y^m b^n dx^m = x^n a^m dy^m$, sivè $b^{\frac{n}{m}} x^{-\frac{n}{m}} dx = \frac{ady}{y}$. Quod si malis esse $x^n + y^m = s^r$, æquatio erit $x^n dy^r + y^m dy^r = y^r dx^r$. Similiter & si detur æquatio $t^n = y^m a^{n-m}$, post substitutionem, & reductionem ad communem denomina-

na-

natorem, & divisionem ęquationis per $y^n$ si extrahatur utrinque radix à numero *n* denominata, & deindè quadretur utraque æquationis pars, reducetur per antithesim æquatio ad $\overline{dx^2 = y^{\frac{2m-2n}{n}} a^{\frac{2n-2m}{n}}}$ $dy^2 - dy^2$ undè $dx = dy \sqrt{y^{\frac{2m-2n}{n}} a^{\frac{2n-2m}{n}} - 1}$, quæ erit æquatio curvæ quæsitę ad simpliciores terminos reducta. Haud aliter, si data æquatio jubeat TB esse quantamcumq; proportionalem post DB & AB sivè $s = \frac{x^{m-1}}{y^{m-2}}$, fiet æquatio $y^{m-1}dx = x^{m-1} dy$. Posita deniquè æquatione $s^m + r^n = a$ fiet æquatio $y^m dx^{n+m} + y^n dy^{n+m} = a dy^m dx^n$. Hæ omnes æquationes inveniuntur substitutis pro s, r, t, earum valoribus, quos suprà assignavimus, & procedendo deinde circà æquationes inventas per has substitutiones, juxtà notas regulas pro æquationum reductione. (*num.* 5)

### *Exemplum V.*

12 SI datam æquationem ingrediantur etiam quantitates transcendentes, scilicet transcendenter tantùm datæ per x, vel y, vel utramque, & constantes, non erit difficiliùs æquationem obtinere differentialem; Ut si $s = p$, sitque p arcus cujus sinus sit y in circulo cujus radius sit a, data quædam constans; quo in casu p datur transcendenter per y,

&

& constantem a. Opus erit tantùm pro s ponere $\frac{ydx}{dy}$, & fiet $dx = \frac{pdy}{y}$ æquatio differentialis quæsita, in qua primæ tantum differentiæ reperiuntur cum p sit integrale ex quantitate $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, ità ut æquatio $dx = \frac{pdy}{y}$ scribi possit $dx = \frac{dy}{y}\int\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$ æquatio exprimens relationem primorum differentialium coordinatorum quæsitæ curvæ. Et patet quomodò si p non solum detur per y, sed etiam esset quantitas, quæ dari supponerentur per x, & y, quocumq; modo immaginari hoc liceat (dummodò non dependeat à differentiis secundis ipsarum coordinatarum, aut ab altiorum graduum differentiis) ad æquationem semper perveniatur pro curva quæsita, in qua primæ tantum differentiæ reperiantur licet signis integralibus implicitæ sint. Dixi mòx quantitatem p, sivè arcum habentem pro radio a, & pro sinu y esse integrale ex $\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$. Res satis manifesta est. Si enìm sinus est y, sinus complementi erit $\sqrt{aa-yy}$; Iungantur simùl quadrata differentialium sinus, & sinus complementi, fietque quadratum differentialis arcus $\frac{aady^2}{aa-yy}$ unde differentiale arcus $= \frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$, & arcus ipse $= \int\frac{ady}{\sqrt{aa-yy}}$

Pro-

## *Propositio II.*

SI detur relatio lineæ BT subtangentis describendæ curvæ AD cujus axis debeat esse linea quævis curva data AB, & ordinatæ perpendiculares ad axem, si detur inquam relatio lineę BT ad suas coordinatas, vel ad quantitates, quæ quomodocumque dentur per coordinatas, & constantes, invenire ęquationem differentialem primi gradus pro tali curva. Fig. 2.

13 Supponatur per quodvis describendæ curvæ punctum D ordinata DB eique infinitè proxima db, quę cum priore in C conveniat puncto evolutę curvæ AB, voceturque $AB = x$, $BD = y$, BC radius circuli osculantis axim in puncto B sit $= q$. $dG = dy$, $Bb = dx$, producaturque Bb tangens axis donec cum tangente per D coeat in T, est manifestum fore DG quartam post CB, Bb :: CD, unde erit $= \frac{qdx + ydx}{q}$.

Undè propter similia Triangula dGD, DBT erit $BT = \frac{qydx + yydx}{qdy}$. In data igitùr æquatione exprimente relationem coordinatarum ad BT, pro s, sivè pro BT substituatur hic valor, orietur manifestè æquatio differentialis quæsitæ curvæ. Si ponatur curva cadere ad partes E, hoc est ad partes ad quas axis concavus est, subtangens BV facilè eruetur $\frac{qydx - yydx}{qdy}$, vel $\frac{yydx - yqdx}{qdy}$.

CO-

## COROLL.

14 Hic quoque si in æquatione data exprimente relationem subtangentis s ad coordinatas, vel ad quantitates, quæ dentur per coordinatas, & constantes adesset ds, æquatio resultans, substituto pro ds ejus valore contineret ddy, vel ddx, undè non esset primi gradus. Et si hìc quoque daretur non quidem subtangentis, sed interceptæ inter tangentem, & lineam quæ perpendiculariter ducitur ad EC per C, relatio ad coordinatas, vel ad quomodocumque datas per coordinatas & constantes, semper facile erit ad æquationem pervenire, est enìm hæc intercepta $CR = \frac{qqdx + 2qydx + yydx}{qdy} = r$, qua substituta in data æquatione loco literæ r nisi adsit in æquatione dr, orietur quæsita æquatio. Idemque de aliis lineis dicendum est, quæ ex tangente dependent, qualis esset perpendicularis à puncto C ad tangentem, & innumeræ tales.

### *Exemplum.*

15 AD dati circuli AB peripheriam tanquam axem curvam describere, cujus subtangens BT, sit æqualis ordinatæ, ità ut sit ubique $s = y$. Si pro s ponas $\frac{qydx + yydx}{qdy}$, & pro q ponas a con-

stan-

ſtantem ex natura, circuli fiet æquatio $adx + ydx = ady$. Si verò ad eundem axem deſcriptæ curvæ ſubtangens debeat eſſe ad $y$ in conſtanti ratione $a$, ad $b$, ità ut $ay = bs$, erit æquatio $abdx + ybdx = aady$. Si eſſe debeat tangens $DT = t = a$, fiet ęquatio (invento valore ipſius $t$, qui propter triangulum rectangulú $DBT$ eſt $\sqrt{\frac{aayydx^2 + y^4dx^2 + 2ay^3dx^2 + aayydy^2}{aady^2}}$) pro curva quæſita $dx = dy \frac{\sqrt{a^4 - aayy}}{ay + yy}$, aut quod idem eſt, $dx = dy \sqrt{\frac{a^3 - aay}{ayy + y^3}}$

## *Exemplum II.*

16 SI, exiſtente axe $AB$ curva quavis data, debeat curva ducenda $AD$ abſcindere ſubtangentes $BT$ æquales radiis oſculantis circuli in correſpondétibus punctis axis, hoc eſt ſi debeat eſſe $s = q$, æquatio erit $dx = \frac{qqdy}{yq + yy}$. Si ſubtangens debeat efficere $x + y$, ſivè data ęquatio ſit $s = x + y$, erit quæſita $qydx + yydx = qydy + qxdy$. Si ſubtangens $s$ debeat eſſe ad ſubtangentem $\frac{ydx}{dy}$ (quam haberet curva quæſita, ſi axis ejus in rectam diſtenderetur) in ratione conſtante $a$ ad $b$, eſſet æquatio $aqydx = bqydx + byydx$, quo caſu (ut in aliis multis qui

occurrere possunt) differentialis æquatio statìm reducibilis est ad algebraicam, provenit enìm, diviso utrobique per ydx, $aq = bq + by$, & $y = \frac{aq - bq}{b}$; debet igitùr radius osculi CB produci in D ità ut BD sit ad BC, ut a—b ad b ut sic inveniatur punctum D in curva AD constitutum, cujus subtangens BT, sit ad subtangentem quam haberet si ejus axis AB in rectam abiret (in variata abscissarum quantitate) ut a, ad b.

## *Propositio III.*

*Fig. 1.* SI dari supponatur relatio spatii ABD curva quęsita ejusque coordinatis comprehensi, vel curvę AD, vel solidi orti ex rotatione curvæ ipsius quæsitæ circa axium alterutrum, datamve quomodocumque positione rectam, aut superficiei, quæ ex tali revolutione sit oritura ad spatia quævis, vel lineas, quæ per coordinatas, & constantes quomodocumque dentur, invenire æquationem differentialem primi gradus curvæ quæsitæ.

17 Ordinatæ BD, ducatur infinitè proxima bd, & DF, infinitè proxima df; erit spatiolum DBbd elementum spatii ABD $= ydx$, undè vocando p spatium ABD erit $dp = ydx$. Similitèr spatium infinitè parvum FDdf, quod est elementum spatii ADF, est $= xdy$, quarè, vocando q spatiũ ADF, erit $dq = xdy$.

Li-

Lineola verò Dd $\sqrt{dx^2+dy^2}$ erit elementum curvæ AD, quam proindè vocando r, erit $dr = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Si autem ratio radii ad sui circuli integram circumferentiam vocetur ut a ad b, concipiatur autèm figura ABD in gyrum ferri circà immotum axem AB, & sic una quævis ordinata BD circulum cujus illa sit radius describere, erit hujus circuli tota circumferentia $= \frac{by}{a}$, quæ ducta in radium dat duplum areę circularis, undè hæc area futura est $\frac{byy}{2a}$, ducta autem hac area in altitudinem infinitè exiguam Bb, fit $\frac{byydx}{2a}$ elementum solidi ex rotatione figuræ ADB circà axem AB geniti, quod solidum vocando s, erit $ds = \frac{byydx}{2a}$. Nec absimilitèr reperiemus, quod vocando t solidum, quod fit ex gyro figuræ AFD circà axem AF, erit futurum ejus differentiale $dt = \frac{bxxdy}{2a}$. Superficies porrò orta ex rotatione AD circà AB habet pro elemento productum ex lineola Dd per totam circuli radium DB habentis peripheriam circulariter ducta, hoc est $\frac{by\sqrt{dx^2+dy^2}}{a}$, quarè $du = \frac{by\sqrt{dx^2+dy^2}}{a}$ si u sit hæc superficies, & eodem prorsùs modo $dv = \frac{bx\sqrt{dx^2+dy^2}}{a}$ si v concipiatur esse superficies orta ex rotatione AD circa AF. Ad inveniendam igitùr æquationem differentialem curvæ cum datur relatio quantitatum p, q, r, &c. ad coordinatas, vel ad quantitates, quæ dantur per coordinatas, differentietur æquatio data exprimens hanc relationem, & loco differentialium dp, dq, dr, &c. ponantur mox inventi valores, eritque æquatio differentialis primi gradus pro curva quæsita.

### COROLL.

18 ÆQuationem igitùr datam, ne ingrediantur quantitates per dx, vel dy compositæ, quales sunt subtangens, subnormalis, & reliquę quarum determinatio à tangentis determinatione pendet, quasque prima propositione consideravimus, tunc enim in differentiatione, quæ debet haberi, aderunt ddy, ddx, efficientia æquationem pro curva quæsita, non primi gradus, sed altioris. Sed & alios casus dari contingit, quibus æquatio per regulam traditam reperta, primum gradum excedat, ut si æquationem datam ingrediantur quantitatum p, q, &c. altiores potestates pp, $p^3$, aut etiam earum productum ppq, pr, &c. post quarum quantitatum differentiationem quantitates ipsas p, q, transcendentes, adhùc in æquatione remanere necesse est, undè ad tollendas illas, nova sit opus differentiatione. Si quantitates datæ per ddx, vel ddy æquationem da-

tam ingrediantur, aut quantitates per altioris generis differentialia expressæ, idem succedet, & in pluribus alijs casibus, quos singillatìm distinguere longum esset.

*Exemplum.*

19 SOlidum quod fit, ex figura quæsita AD circà axem AB rotata, debet esse ęquale ei quod circà axem coniugatum AF rotata paritèr producit, scilicet $t = s$, & $dt = ds$, sivè $\frac{yybdx}{2a} = \frac{xxbdy}{2a}$; ergò differentialis ęquatio quam quęrimus erit $xxdy = yydx$. Si autem solidum ex rotatione figuræ circà axem AB debeat esse æquale solido, quod habeat pro altitudine constantem a, & pro basi planum æquale complemento figuræ quæsitæ, sivè æquale spatio AFD, hoc est æquatio data sit $s = aq$, & $ds = adq$, substitutis pro ds, & dq eorum valoribus orietur $\frac{yybdx}{2a} = axdy$, & $yybdx = 2aaxdy$. Si spatium ABD debeat esse ubique æquale rectangulo constantis in curvam AD, vel $p = ar$, erit $dp = adr$, undè $ydx = a\sqrt{dx^2 + dy^2}$, & indè $dx = \frac{ady}{\sqrt{yy - aa}}$. Si solidum aar constantis quadrati in curvam debeat æquare solidum s, sivè $aadr = ds$ erit $\frac{yybdx}{2a} = aa\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

erit

erit postquam quadrando surdas quantitates reduxerimus, & alia de more peregerimus $dx = \frac{2a^3dy}{\sqrt{y^4bb - 4a^6}}$.

*Exemplum II.*

20 SI summa cuborum coordinatarum æquare debeat solidum ex revolutione ABD circà AB, erit $s = x^3 + y^3$, & $ds$, sivè $\frac{yybdx}{2a} = 3xxdx + 3yydy$, vel $yybdx = 6axxdx + 6yyady$. Quod si solidum illud $s$ debeat esse ad cylindrum basis circularis DB altitudinis verò AB ut $x$, ad $y$, erit $s, \frac{byyx}{2a} :: x, y$, undè facta æquatione $\frac{byxx}{2a} = s$, & $\frac{bxxdy + 2byxdx}{2a} = ds = \frac{byydx}{2a}$, & habetur æquatio quęsita $xxdy + 2yxdx = yydx$. Si superficies solidi $s$, quæ est $u$ ad summam quadratorum ex coordinatis, constantem rationem servare jubeatur quam $a$ ad $c$, erit data æquatio $cu = axx + ayy$, undè $cdu = 2axdx + 2aydy$ seù $cby\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2aaxdx + 2aaydy$, & quadrando $ccbbyydx^2 + ccbbyydy^2 = 4a^4xxdx^2 + 4a^4yydy^2 + 8a^4xydydx$.

COROLL.

21 EX methodo quâ utimur ad eruendas has æquationes differentiales cum datur relatio spa-

ſpatii curva quęſita comprehenſi ad coordinatas, facile eſt invenire æquationem differentialem primi gradus etiàm in curvis quarum axis ſit data quævis curva, quando detur æquatio, quæ ſpatii magnitudinem, aut curvæ ipſius longitudinem ad coordinatas, vel quantitates, quæ per coordinatas dentur utcumq; referat, dummodò (quod pro lineis ad axes rectos relatis adnotavimus) nō appareant, aut ſpatiorū, aut curvæ ipſius altiores dimenſiones, in ęquatione data, & non adſint alię quātitates, quę per dx, & dy dentur, qualis eſſet ſubtangens, & aliæ à tangentis determinatione pendentes. Si exempli cauſa velis curvam AD ſuas correſpondentes in axe ordinatas AB + BD ex æquare; inventa $DG = \frac{qdx + ydx}{q}$ ſi ejus quadrato addas $dy^2$ erit Dd elementū curvę AD $= \frac{\sqrt{qqdx^2 + yydx^2 + 2qydx^2 + qqdy^2}}{q} = dy + dx$ ex hypoteſi. Quæ æquatio reducetur ad $dx = \frac{2aady}{yy + 2ay}$, ſi curva AB, quæ axis eſt, jubeatur eſſe circulus radio a deſcriptus. Si elementum ſpatii ABD quæſiveris, erit (ſubducto $CBb = \frac{qdx}{2}$ ex CDG quod eſt $= \frac{qqdx + yydx + 2qydx}{2q}$) reliquum trapeziolum DdbB elementum quæſitum $= \frac{yydx + 2qydx}{2q}$, un-

(nu.18.)

Fig. 2.

(nu.13.)

dè

dè & æquationes eruere in promptu erit cum dabitur proprietas ſpatii quod quæſita curva ad axem curvatum poſita debeat continere.

*Propoſitio IV.*

Fig. 3. Deſcriptis infinitis Curvis algebraicis ſimilibus, & circà datum axem AT, punctumque in illo A, ſimiliter poſitis, axemque in uno, pluribuſve punctis L ſecantibus, aſſumptoque in earum unaquaque LE, LG arcu LE, LG eidem datę conſtanti a ubique æquali; quęritur curvæ ſic deſcriptæ BEG æquatio differentialis primi gradus.

22 Quamvis æquationes, differentiales curvarum in gratiam tantùm conſtructionis eruendæ hic conſideremus, quem ſanè in uſum inutile videri poſſet hic curvę BEG æquat. differētialem quęrere, cujus cōſtructio, ex hypoteſi, aſſumptis arcubus LE, LG datę a æqualibus expeditur, invenienda nihilominùs eſt hæc æquatio, quæ viam ſternit, qua in huiuſmodi innumeris caſibus ad æquationes inveniendas gradiamur, ſimulque Theorematum, haud contemnendorum, fons eſt, & origo.

23 Nomine curvarum ſimilium intelligimus curvas ejuſdem naturę, in quibus Parametri, ſivè conſtantes ſunt in eadem ratione. Hinc ſi curvarum æquatio unam tantùm conſtantem ſiuè parametrum contineat, ut parabola ad axem, & verticem axis relata

lata erunt omnes parabolæ ad unum axem, & axis verticem relatæ invicèm similes. Sed si curvarum æquatio duas, vel plures constantes includat, ut ellipsis, erunt similes illæ in quibus singulæ parametri unius, ad singulas parametros homologas alterius eandem servabunt rationem.

24 Assumpto igitùr quovis puncto E in data curva BEG, eique infinitè proximo G, ducantur per E, & G curvæ genitrices EL, GL, perque punctum A jungatur AE curvæ LG occurrens in F, & per E ducatur EC tangens curvam genitricem EL in E, jungaturque AI parallela ipsi EC, producaturque EG faciecula curvæ BEG donec in T secet axem AB, tangatque sic datam curvam in E, & secet AI productam, si fuerit opus, in H. Data hac tangente, non poterit latere æquatio differentialis curvæ propositæ, ut mòx patebit. Ponamus curvas EL, GL, omnesq; reliquas illis similes, ad axem AB, punctumq; in illo A referri, per ordinatas angulum quemvis cum axe facientes. Esto igitur per E ordinata EO, assumanturque $AO = x$, $OE = y$ ordinatę curvę datæ EG; Subtangens itaque OC curvæ LE in puncto E vocetur $s$, & tangens EC vocetur $t$; parameter autèm quævis lineę EL vocetur $= z$, constans quidem respectu diversorum in eadem curva EL punctorum, sed variabilis respectu diversarum curvarum EL, GL. Clarum est, ex natura curvarum similium circà eundem axem, idemque in illo punctum similitèr lo-

tarum fore ut parameter una lineæ EL ad homologam parametrum lineę GL, ità EL, FL, sivè z, $z+dz$ :: a, ad FL, quæ proindè erit $\frac{az+adz}{z}$, ex qua demendo GL $=$ a, reliquum erit $\frac{adz}{z}$, $=$ GF. AE verò ponatur $=u$, & quoniam iterùm z, $z+dz$ :: AE, AF, erit AF $= \frac{uz+udz}{z}$, undè EF $= \frac{udz}{z}$. Sed triangula EFG, EAH sunt similia, eo quod FG tangens curvæ LF in puncto F (quod puncto E similitèr positum est propter rectam AEF) sit parallela tangenti EC, & lineæ HA, igitùr HA $=$ a, quod constructionem elegantissimam suppeditat, qua in curva BEG per datum punctum E quodvis tangens ducatur, ducta AH per A parallela tangenti quæ per E ad genitricem curvam EL inclinatur, & assumpta AH $=$ constanti datæ a, sic enìm juncta EH tangens erit. Triangula porrò ECT, HAT sunt similia, ergò EC, AH :: CT, AT, & dividendo EC $-$ AH, AH :: AC, AT, sivè $t-a$, a :: $s-x$, AT $= \frac{sa-ax}{t-a}$, undè dempta OA $=$ x, reliquum OT $= \frac{sa-xt}{t-a}$ subtangens curvæ propositæ BEG, quæ cum ex canone universali sit $= \frac{ydx}{dy}$, erit $sady - xtdy = tydx - aydx$, in qua æquatione signa possunt

ſunt eſſe varia, pro varia puncti O poſitione reſpectu puncti A. Poſito deindè abſciſſam quamvis curvę LE eſſe PA = q, & ejus ordinatam PQ in angulo QPA ipſi EOA æquali eſſe = r, invenietur valor ſubtangentis, & tangentis pro quovis puncto Q curvæ expreſſus per q, r, & conſtantem unam, vel plures inter quas adeſſe poterit conſtans z (conſtantes intelligo reſpectu diverſorum in eadem curva qualis eſt LE pnnctorum) in quo valore ſi pro q, & r ponas x, & y, invenietur valor ſubtangentis, & valor tangentis pertinentium ſpecialitèr ad punctum E, ſivè valor linearum OC, EC quos ſubſtituemus pro s, & t in æquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$, & fiet æquatio quam ingredientur tantùm x, y, a, & z cum alijs parametris, ſi adſint, conſtantibus quidèm pro una quavis linearum EL, GL, ſed variabilibus pro diverſis punctis curvæ BEG. Iàm verò cum omnes curvæ EL, FL ſimiles eſſe ponantur, erunt parametri homologæ illarum in conſtanti ratione in omni curva, hoc eſt ſic erit parameter z in curva EL, ad parametrum aliam quamvis curvæ ejuſdem, quam dicemus b, ut parameter homologa parametro z in curva GL, ad parametrum homologam parametro b in curva eàdem, & ſic in reliquis, ità ut poſito rationem z ad b eſſe ut m, ad n, poſſimus pro b ſcribere $\frac{nz}{m}$, & n, & m futuræ ſint conſtantes non ſolum pro una quavis curvarum EL ſeorsìm ſumpta, ſed & pro omnibus ad invicèm relatis, quæ ob ſimilitudinem, quam ſervant, conſtantem ſuarum parametrorum relationem habere ſupponuntur. Non abſimilitèr, ſi adfuerit tertia conſtans, ſivè parameter c, pro illa ponemus $\frac{fz}{g}$, eruntque f, g conſtantiſſimę, ſivè in omni curva EL, GL eędem. Poſtquam igitùr in æquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$ ſubſtituerimus pro s, & t earum valores, ſubſtituamus ulteriùs pro b, c &c. earum valores $\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ &c. & æquatio reſultans explicabitur tantùm per literas y, x, dx, dy, z, & conſtantes a, n, m, f, g &c. Tandèm & ipſa z tolli poterit ex æquatione, ſi in ęquatione pro curvis EL ſubſtituamus priùs pro b, c, &c. valores $\frac{nz}{m}$, $\frac{fz}{g}$ &c. tunc enìm (ſi algebraica ſit æquatio ut ſupponitur) habebitur valor ipſius z in literas q, r, m, n, f, g, & alias conſtantes, abſque eo quod aut dq, aut dr appareant, undè pro q, & r poterimus ponere x, & y, ſicque valorem ipſius z habebimus in x, y, m, n, &c, qui ſubſtitutus in ęquatione $sady - xtdy = tydx - aydx$ reſtituet demùm æquationem differentialem pro curva propoſita BEG ſolis x, y, dx, dy a, m, n, &c. conſtitutam.

CO-

## COROLL.

25 VIdes hanc conditionem, quam addidimus, quod curvæ ordinatìm datæ EL, GL sint algebraicę, ideò apponi, ut per hanc methodum, ęquatio differentialis reperiatur pro curva BE, per solas coordinatas, earumque differentialia, & constantes expressa. Verùm quo ad methodum ducendi tangentes ad curvam BEG attinet, assumpta juxtà regulam AH = a, & quo ad valores differentialium EG, FE, hi quidem nullo pacto hac conditione angustantur, sed etiàm si curvæ datæ transcendentes essent æquè benè procedunt, & pro legitimis habendi sunt, cum in eorum inventione nulla ęquationis linearum LE, LG ratio habeatur.

## COROLL. II.

26 SIvè igitùr curvæ LE, LG ad cōmunem axem, punctumque commune A, circà quod similiter positæ sunt, per rectas EO angulum EOA continentes cum axe ęquatione algebraicâ, sivè transcendente referantur, sempèr, ducta per quodvis punctum E in quavis ex infinitis curvis ad libitum assumpta LE, tangente EC, ductaque infinitè proxima ad assumptam LE, quę sit FL, junctaque AE secante FL in F, & ducta AI parallela ad EC, sivè ad FG, similia reperientur triangula ECO, IAO undè

dè CO, OE :: AO, OI, sivè s, y :: x, $\frac{xy}{s}$ = OI, & reliquum IE = $\frac{ys - xy}{s}$ assumimus enim nùnc pro x, & y non ordinatas ad curvam BEG, sed ad quamvis ex infinitis curvis EL, & pro s, & t, correspondentes subtangentem, & tangentem in eadem curva. Triangula iterùm EAI, EFK sunt similia, producta OE in K usquè ad curvam LF, igitùr EA, EI :: EF, EK, & cum AE, EF sint respectivè u, & $\frac{udz}{z}$ erit EK = $\frac{ysdz - xydz}{sz}$. Est autèm EK differentiale ordinatæ OE pertinentis ad lineam EL, posito abscissam AO invariatam remanere, & variari tantùm parametros lineę EL, ità tamèn ut eandem semper ad invicem servent proportionem. Linea enim OK est ordinata ad curvam FL curvæ EL infinitè proximam eique similem, & circà axem LA punctumque A similiter positam, & pertinens ad abscissam AO, ad quam etiàm pertinet ordinata OE in curva LE, quod idem est ac dicere, ordinatam OE, fieri OK, si supponantur variabiles parametri lineę EL eundem tamèn ad invicèm respectum custodientes (quo ipso curva EL in sibi similem infinitè proximam FL transit) & abscissa OA constans supponatur; EK igitùr est id per quod crescit OE, quando ex ordinata lineæ EL, pertinente ad abscisſam OA, fit ordinata curvæ FL priori ſimilis ſimiliterque poſitę circà axem AL, punctumque A, fit inquam talis ordinata pertinens ad abſciſſam eandem OE; uno verbo tandèm EK eſt differentia duarum applicatarum ad eandem abſciſſam ſpectantium, ſed ad diverſas curvas infinitè proximas, & ſępè memoratis legibus deſcriptas, ordinatarum. Ad inveniendum igitur EK, dfferenrialc cujuſvis ordinatę OE in quavis linea EL algebraica, vel tranſcendente angulum quemvis cum axe facientis, poſito parametros curvę illius, ſivè quantitates conſtantes, quæ valorem ipſius OE quomodocumque componunt, variari ſemper eandem ad invicem proportionem ſervantes, & ſimùl abſciſſam AO ſtare invariatam, utemur ſuprà invento canone EK $= \frac{ysdz - xydz}{sz}$, ubi y eſt ipſa OE differentianda, s eſt ſubtangens curvæ datæ in axe AO, ad quod refertur data curva LE, ad punctum E pertinens, quantitas, autem x, abſciſſam denotat AO, quam ut conſtantem in differentiatione ponimus, z verò eſt parametrorum una ad libitum ſelecta, nihil enìm intereſt quam potiùs aſſumamus. Rem exemplis illuſtrare non inutile forſan, ſed certè nimis longum foret. Aſſumat unuſquiſque ſibi quantitates unius dimenſionis algebraicas ad differentiandum poſita x conſtante, & a, b, c, &c. variabilibus modò variatæ eandem relationem ad invicem retineant, differenrentietque methodo Hospitaliana, invenietq; idem differentiale, quod etiàm reperiet hac usus methodo, quam insupèr ad transcendentes quantitates, sivè signo integrali suppositas extendere potest. Unicum exemplum esto pro algebraicis lineis, si datæ curvæ EL, FL, &c. essent totidem circuli, quorum centra in communi axe AO, talitèr locata essent, ut distantiæ singulę AL, AL, &c. essent quartæ partes diametrorum, hoc est, AL quarta pars diametri circuli LE, AL verò quarta pars diametri circuli LF, &c. ordinatæ autèm EO, brevitatis gratia, ad axem AO perpendiculares assumantur. In hoc casu, curvæ omnes EL, FL sibi similes erunt, & circà communem axem, & punctum A similiter locabuntur, æquatio autèm, posito horum circulorum radio $= 2z$, abscissà OA $x$, ordinata OE $= y$ erit $y = \sqrt{3zz - xx + 2zx}$. Subtangens OC $= s$ per consuetam regulam est $= \frac{3zz - xx + 2zx}{z - x}$, undè $s - x = \frac{3zz + zx}{z - x}$. quarè $EK = \frac{s - x}{sz} : ydz$ erit $= \frac{3zdz + xdz}{\sqrt{3zz + 2zx - xx}}$ prorsùs ut prodit differentiando juxtà consuetas regulas $\sqrt{3zz - xx + 2zx}$ posita $z$ variabili, & $x$ constāte. Si curvæ LF, LK cõmune punctum habeant L, & ordinatis existentibus ad axem AO perpendicularibus, positis AO $= x$, OE $= y$ sit $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, & debeat $y$ differentiari posita $x$ constante, & $a$ variabili, inve-

ve-

veniatur curvæ AE (cujus æquatio est $y=\int\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, vel $dy=\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$) subtangens OC, eritque OC $=s=\frac{y\sqrt{2ax-xx}}{a}$, & proindè $\frac{\overline{s-x}:yda}{sa}$ (quoniàm hic z interpretamur per a) sivè quæsitum differentiale erit $\frac{yda\sqrt{2ax-xx}-axda}{a\sqrt{2ax-xx}}$.

27 Observare non prætereamus, quod unitas interdùm locum alterius parametri teneat, ità ut differentianda quantitas plures constantes aliquandò includat, licèt una tantum sit manifesta ut si inveniendum sit differentiale quantitatis transcendentis $\int\frac{x^3dx+adx}{aax-a^3}$ posita a variabili, & x constante, debet membrum adx intelligi bis ductum in unitatem, quam si vocemus b, erit quantitas differentianda $\int\frac{x^3dx+abbdx}{aax-a^3}=y$ duabus parametris composita quæ proindè constantem ad invicem rationem servare debent, ut tradita regula utamur ad ejus differentiale reperiendum. Ponamus a, & b in constanti proportione perseverare debere, erit $s=\frac{aaxy-a^3y}{x^3+abb}$ undè $\frac{\overline{s-x}\,yda}{sa}$ differentiale, quod quærebamus erit $=\frac{aaxyda-a^3yda-abbxda-x^4da}{a^3x-a^4}$.

28 Aliud notare convenit, ut regula pro ordinatis differentiandis ad quantitates cujusvis dimensionis possit expandi. Satis enim clarum reor, mox traditam regulam, pro ut tradita est, lineis tantùm, sivè ordinatis curvarum inservire posse, ut earum differentialia eruantur. Si igitùr differentianda proponatur quantitas duarum pluriumve dimensionum, in qua x ut constans, parametri autèm ut variabiles censendę forent, constantem ad invicèm respectum habentes, debet illa in quantitatem unius dimensionis permutari, sed hæc ipsa transmutatio negotium facessere posset ei, qui non consideraverit, qua via hoc legitimè, & ad intentum utilitèr fieri possit. Exempli loco assumamus esse propositam quantitatem $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ ad differentiandum posita x constante, a verò variabili; debet illa ad unicam dimensionem reduci, si assignata differentiandi methodo quis uti velit. Si quis scribat igitùr $\frac{2aax - x^3}{aa + ax}$, & hujus differentiale inveniat per exhibitam methodum, erit illud $= \frac{2aaxxda + 2ax^3da + x^4da}{a^4 + aaxx + 2a^3x}$. Sed hoc invento non poterit facilè ad quęsitum differentiale quantitatis $\frac{2aax - x^3}{a + x}$ regredi, cum à differentiali quantitatis $\frac{2aax - x^3}{aa + ax}$, ad differentiale

quan-

quantitatis $\frac{2aax-x^3}{a+x}$ non valeat regreſſus per ſimplicem multiplicationem illius per a inſtitutam, quia hìc a non ut conſtans, ſed ut variabilis aſſumitur. Debet igitùr quantitas propoſita $\frac{2aax-x^3}{a+x}$ reduci ad ſimplicem lineam per totidem dimenſiones ipſius x, quot fuerit neceſſarium, & deindè quantitatis ſic reductę differentiale inveniendum eſt per ſuperiorem regulam, inventum enìm, ſi multiplicetur, aut dividatur per dimenſiones ipſius x per quas dividenda, aut multiplicanda fuit data quantitas ut unius fieret dimenſionis, invenietur tutò differentiale propoſitę quantitatis. Sìc ad inveniendum differentiale quantitatis ſuperioris $\frac{2aax-x^3}{a+x}$, quæ duarum dimenſionum eſt, poſita x conſtante, ſcribo priùs $\frac{2aax-x^3}{ax+xx}=y$, hujuſque differentiale invenio, pro quo eſt $s=\frac{\overline{ax+xx}:\overline{2aax-x^3}}{-2x^3a-x^4-aaxx}$, & $\frac{\overline{s-x}\,yda}{sa}=\frac{2aaxxda+x^4da+4ax^3da}{aaxx+x^4+2ax^3}$ differentiale ex $\frac{2aax-x^3}{ax+xx}$ poſita a variabili, & x conſtante, quo invento ſi illud ducatur in x, fiet differentiale ex $\frac{2aax-x^3}{a+x}$ (eo quod x conſtans eſſe ponitur)

 2aa-

$= \frac{2aaxda + x^3 da + 4axxda}{aa + xx + 2ax}$ prorsùs ut prodit differentiando eandem quantitatem Hoſpitaliana methodo, & literam a, non x ut variabilem uſurpando. Quod ſi quantitas differentianda fuiſſet tranſcendens plurium dimenſionum, ut $\int dx\sqrt{aa-xx}$, reduxiſſemus illā ad unicam ſcribendo $\frac{\int dx\sqrt{aa-xx}}{x}$ $= y$ ſivè $\int dx\sqrt{aa-xx} = xy$, cujus curvę valor ſubſtangentis s eſt $\frac{xy}{\sqrt{aa-xx}-y}$, undè valor differentialis $\frac{\overline{s-x}:yda}{sa} = \frac{2yda - da\sqrt{aa-xx}}{a}$, quod propterea ductum in x dabit quæſitum differentiale quantitatis $\int dx\sqrt{aa-xx} = \frac{2yxda - xda\sqrt{aa-xx}}{a}$,

29. Addo, quod hęc regula differentiandi ordinatas curvarum cum in curvas ſimiles tranſeunt facillimè fluit ex conoidis cujuſdam ſectione, cujus baſis ſit una curvarum ſimilium, vertex verò conoidis in ſublimi, ità ut quę à vertice conoidis, ad figurę ipſius, quę pro baſi eſt verticem ducitur recta linea, baſis ipſius parametro ęqualis exiſtat. Si nem-

nempè tale ſolidum ſecetur plano lateri coni parallelo, ordinatę ſectionis erunt etiàm ordinatę ad diverſas curvas baſi ſimiles,communemque abſciſſam in illis habebunt, diſtantiam ſcilicèt ſectionis à latere coni,cui parallela eſt. Ducta igitùr talem ſectionem tangenre, quę facilè ducitur, ex illa in promptu eſt eruere differentialia ordinatarum talis ſectionis, & invenientur convenire cum ijs, quę mox tradidimus; nobis tamèn,quibus hęc incidentèr tantùm occurrunt indicaſſe ſufficiat.

## COROLL. III.

30 Conſiderando portiones curvarum, quæ intercipiuntur axe LO, & ordinata quavis OK, ſivè curvarum ſegmenta EL, KL, & reliqua, oritur alia non inutilis meditatio. Claritatis gratia fiant ſequentes denominationes, & hypoteſes. Data ponatur in angulo quovis ad axem AO (circà quem, & circa punctum A in illo poſitum ſimilitèr conſtituta eſt feries ſimilium curvarum EL, KL &c.) quęvis recta OK, auferens à curvarum ſerie portiones EL, KL &c. quarum minima ſit invenienda, ſivè inter infinitas de ſerie LE, KL illa ſeligenda ſit curva, cujus arcus inter axem LO, & datam rectam EO ſit omnium minimus. Aſſumatur una ex curvis ad libitum LE, eique infinitè proxima LK, ſitque AO data = a, AE = u, curva EL = x, ejuſque para-

ra-

rameter, aut parametrorum una ad libitum $= z$, ponaturque curvę EL ęqualis portio GL, ductisque tangentibus EC, FG invicèm parallelis, considerentur triangula ECO, IAO; est enim $OC = s$, $CE = t$ :: $AO = a$, $IA = \frac{at}{s}$; deindè propter similia EIA, EKF erit $EA = u$, $IA = \frac{at}{s}$ :: $EF = \frac{udz}{z}$ ad FK $= \frac{tadz}{sz}$; est autèm $FG = \frac{xdz}{z}$, undè $FG - FK = KG = \frac{xsdz - tadz}{sz}$. Sed KG est differentiale arcus EL, quatenùs rectis LO, OE intercipitur, cum sit id per quod arcus infinitè proximus KL superat antecedentem EL, sivè GL, ergò differentiale arcus intercepti inter duas lineas AO, OE (arcus inquam secundum notas regulas descripti) est qualem mòx repertum habemus $KG = \frac{xsdz - tadz}{sz}$, quod si æquetur nihilo, proditura est æquatio $x = \frac{ta}{s}$ indicans arcum illum esse minimum ex infinitis FL, KL &c. qui fuerit quartus post suam subtangentem, tangentem, & lineam AO. Iàm igitùr arcum nùnc possumus sic invenire. Per singula puncta L erigantur ad axem OL rectæ æquales correspondentibus curvarum portionibus LE, LK &c. in angulo quovis exempli gratia recto, eruntque extremitates erectactarum in curva quadam; deindè per singula etiàm punctá L erigantur in eodem angulo quo priùs, putà hic recto, lineæ rectæ æquales quantitatibus $\frac{ta}{s}$, quæ sci: sint quartę proportionales post suas correspondentes OC, CE, & datam AO, secabitque curva, quæ sic fiet curvam priùs constructam, in puncto quodam, per quod ad axem perpendicularis, seù linea in angulo quem cum axe faciunt harum curvarum mòx descriptarum ordinatę ducenda erit, illam secans in L; Per hoc punctum L ponenda est curva similis curvis EL, KL, & circà axem AO, punctumque A similitèr posita ac illę, eritque hæc illa quam quærimus, cujus arcus axe, & recta OE interceptus minimus erit ex omnibus arcubus curvarum illi similium, ac circa eundem axem OL, punctumque A similitèr positarum, rectis AO, & EO interceptis, quia siquidèm talis arcus manifestè erit æqualis quantitati correspondenti $\frac{ta}{s}$. Alias constructiones aferri videre possumus pro hoc arcu minimo inveniendo, in idem tamen recidentes. Nos longiori parcimus digressioni, nostramq; rem reassumere properamus.

Pro-

*Propositio V.*

DEscriptis infinitis curvis similibus, LE, LF, & circà datum axem AB, punctumque in illo A similitèr positis, axemque in uno, pluribusve punctis L secantibus, & posito brevitatis tantùm gratia, ordinatas quibus ad communem axem AB referuntur nempè ipsas EO, GB &c. esse ad axem perpendiculares, assumptoq; in earum curvarum unaquaque spatio LEO, LGB eidem constanti spatio aa æquali, quæritur curvæ EG æquatio differentialis primi gradus.

31 Sunto duæ in quæsita curva EG coordinatę AO, OE x, & y, quas ad axem normales esse brevitati consulentes nùnc supponamus; esto etiàm curvæ genitricis LE subtangens OC $=$ s, & juncta recta AE (quæ producta curvam LF ipsi LE infinitè proximam secet in F) vocetur u; & per F sit ordinata Fa; erit itaque propter curvas similes ut quadratum unius parametri curvæ LE, ad quadratum correspondentis parametri curvæ LF, ità spatium LEO ad spatium LFa, undè si vocetur parameter curvæ LE $= z$, & curvæ LF $= z + dz$ erit $zz, zz + 2zdz + dz^2$ :: aa ad quartum, undè spatium LFa $= \frac{zzaa + 2zaadz + aadz^2}{zz}$, ex quo si demas spatium LGB, quod ex hypothesi est $= aa$, erit spatiolum FaBG rectágulum ex hypothesi $= \frac{2zaadz + aadz^2}{zz}$,

ſivè, relicto ultimo membro quod eſt præcedente incomparabilitèr minus, erit ſpatiolum rectangulum Fa BG $= \frac{2aadz}{z}$, quod diviſum per BG $= y$ dat Ba $= \frac{2aadz}{zy}$. Eſt autèm etiàm par: curvę LE, ad par: curvę LF :: AO, Aa, ergò Aa $= \frac{zx + xdz}{z}$, ex qua dempta AO $= x$, remanet Oa $= \frac{xdz}{z}$ undè BO $= \frac{2aadz - xydz}{zy} = dx$, undè eruitur $\frac{dz}{z} = \frac{ydx}{2aa - xy}$; ducta porrò ipſi tangenti EC parallela AI, quæ OE ſecet in I, erit OI $= \frac{xy}{s}$, & IE $= \frac{ys - xy}{s}$; & quoniàm iterùm ut parameter curvæ LE, ad par: curvę LF :: AE, AF, erit AF $= \frac{uz + udz}{z}$, & dempta AE $= u$, erit EF $= \frac{udz}{z}$; ſed triangula EAI, EFK ſunt ſimilia, cum proptèr curvas ſimiles FK, ſivè tangens in F ſit ipſi EC, ſivè IA parallela, ergò EA, EI :: EF, EK, & erit EK $= \frac{ysdz - yxdz}{sz}$, & ducta per G ipſi BO parallela, & æquali Gi, cum KG ſit ipſi FK indirectum erit CO, OE :: IG, iK ergò iK $= \frac{ydx}{s}$, qua dempta ex EK, reliqua iE ſivè Gm erit

G $\quad = ysdz$

$= \frac{ysdz - yxdz - yzdx}{sz} = dy$, in qua æquatione, si ponas pro $\frac{dz}{z}$ valorem suprà inventum $\frac{ydx}{2aa - xy}$, prodibit æquatio solis x, y, dx, & dy, & s constans, & si pro s ponatur valor ejus ex data natura curvarum LE, LF notus, prodibit æquatio differentialis curvæ quæsitæ GE, modò pro z, seù pro valore constantis respectivè ad curvam LE ponatur ejus valor ex æquatione ejusdem curvæ deductus.

32 Undè & illud facili negotio derivatur, quod subtangens BT curvę EG sit $= \frac{2aas - sxy}{sy - 2aa}$. Quarè ad ducendam in tali curva tangentem opus est tantum rectæ AC aliam AT in directum applicare, ità ut CT ad AT sit ut triangulum CEO, ad spatium LEO.

## *Propositio VI.*

Ponamus nùnc curvas non ampliùs esse similes, sed tantùm ordinatæ OE, OK (quas brevitatis gratia ad axem normales esse fingamus) sint constantèr proportionales, & curva EG abscindat spatia LEO, LGB eidem aa æqualia, quæritur hujus curvæ differentialis æquatio primi gradus, hoc est data quavis curva, & datis alijs infinitis, quarum ordinatæ sint ad ordinatas datæ curvæ easdem abscissas

 ha-

habentes in data ratione constante pro singulis curvis, variabili verò pro omnibus, invenienda est æquatio differentialis primi gradus curvæ EG abscindentis spatia LEO, LGB eidem aa, & invicèm æqualia.

33 Omnes tales curvæ habebunt in axe AB commune punctum initij, quod coincidet cum A, undè assumimus abscissas. Assumpta curvarum una LE, atque illi infinitè proxima LF, & ducta ordinata OEK, quam axi AB perpendicularem finge, secante curvas in E, & K, ductaque per E curvam LE tangente EC, tangens curvam LF per K ducta, sivè lineola KG, producta ad idem punctum C coincidet, quod est facile demonstratu. Ponatur ordinatam Bu ad BG, similitèr OE ad OK esse ut z ad z+dz, quæ quidem ratio, quo ad diversa curvarum infinitè proximarum LE, LG puncta erit constans; vocentur AO, OE coordinatæ ad curvam EG x, & y, OC verò subtangens puncti E in curva LE sivè puncti K, vel F in curva KL sit = s, spatium porrò constans LEO, LGB = aa. Iàm verò quoniàm ponimus ordinatas singulas OE crescere in eadem ratione z ad z + dz, erit spatium LEO ad LKO in eadem ratione z ad z+dz, itaq; LKO $= \frac{zaa + aadz}{z}$, ex quo si dematur LGB = aa reliquum erit spatiolum GEOK $= \frac{aadz}{z}$, quod si brevitatis causa pona-

mus esse rectangulum, opus erit tantùm illud dividere per $GB = y$ ad habendam $OB = dx = \frac{aadz}{zy}$, undè $\frac{dz}{z} = \frac{ydx}{aa}$. Tota verò KO cum sit $= \frac{yz + ydz}{z}$, erit $EK = \frac{ydz}{z}$, & si fiat CO, OK :: GI, IK, sivè in terminis algebr. $s$, $\frac{yz + ydz}{z}$ :: $dx$, ad $\frac{yzdx + ydxdz}{zs}$ erit hæc = iK, sivè $iK = \frac{yzdx}{zs} = \frac{ydx}{s}$, & ex EK $= \frac{ydz}{z}$ si demas $iK = \frac{ydx}{s}$, reliqua iE, vel Gm $= \frac{ysdz - yzdx}{sz} = dy$, quarè si prò $\frac{dz}{z}$ ponas valorem $\frac{ydx}{aa}$ prodibit æquatio $yysdx - aaydx = aasdy$.

Quoniàm verò dari ponimus æquationem curvę, ad quam reliquæ omnes referuntur, habentes suas ordinatas ad illas curvæ datæ easdem abscissas x habentes ut a ad b, hinc si valor y erutus ex data æquatione multiplicetur per a, & dividatur per b, fiet valor ordinatæ pro quavis curva de serie data ad abscissam x pertinentis, & (posita a constante) erit b constans quidèm pro quavis curva, sed variabilis pro diversis curvis de data serie. Exempli loco si data curva esset circulus, series curvarum esset totidem Ellipsium, axem transuersum communem, ſecundarium variabilem, & per b expreſſum habentium; ſi data curva eſſet hyperbola æquilatera, reliquę eſsent totidem hyperbolæ axem quidèm a tranſuerſum communem, ſecundarium porrò variabilem habentium; cum verò tangentes ad curvas LE, LK in punctis, E, K, & in reliquis aliarum talium curvarum punctis ductæ in eadem ordinata BEK poſitis omnes in C ſint conventuræ, ac proindè eandem ſubtangentem BC ſint habituræ, ſequitur, quod ſi tantùm inveniatur valor s pro curva propoſita (qui abſque litera b certò prodibit) & hic ſubſtituatur in æquatione $yysdx - aaydx = aasdy$ fiet ęquatio differentialis primi gradus ſolis x, y, conſtantibus, & dx, & dy conſtans pro curva EG.

Exemplo unico res patebit. Eſto data curva circulus $y = \sqrt{2ax - xx}$. Iàm æquatio pro omnibus curvis ſeriei LE, LF, &c. erit $y = \frac{a\sqrt{2ax - xx}}{b}$ ad infinitas ellipſes, & b eſt conſtans reſpectu duarum curvarum LE, LF, ſed variabilis reſpectu diverſarum. Iàm ſubtangens s curvę cujusvis erit $\frac{2ax - xx}{a - x}$, eadem ac in circulo, quæ ſi in locum s ſubſtituatur in æquatione pro curva EG, prodibit ęquatio quæſita differentialis primi gradus pro eadē curva $2axyydx - xxyydx - a^3ydx + aaxydx = 2a^3xdy - aaxxdy$.

34 Ex æquatione $yysdx - aaydx = aasdy$ eruetur

tur $\frac{ydx}{dy} = BT = \frac{aas}{ys-aa}$ subtangens curvæ EG, quarè facilis constructio.

*Propositio VII.*

Fig. 4. DAta linea quavis MV, quę circà datum punctum fixum C in gyrum ferri concipiatur in plano CMV, manentibus ijsdem distantijs MC, VC &c. invenire oportet æquationem differentialem curvę alterius BM, quæ priorem illam circà C rotatam semper in dato constanti angulo sit sectura.

35 Ducta quavis recta per centrum rotationis C ut CA, assumatur portio ad arbitrium CA, qua ut radio, circulus ducatur AG, assumaturque punctum A, ut initium rotationis. Iàm concipiatur curva MV pervenisse ad quamvis positionem LB, ibique in B secare quæsitam curvam BM in angulo OBF dato, & constante, quem scilicèt continent duæ tangentes, una BO ad curvam datam, altera BF ad quęsitam ductæ in puncto B quo se mutuò secant, jungaturque CB, & ad illam per C perpendicularis CF, secans BO in D, & BF in F, undè ad BO cadat perpendicularis FO. Esto CG $=$ a, sinus rectus anguli OBF, posito radio a, sit $=$ b, sinus verò sui complementi $=$ c. Tum porrò AG $=$ x, BC $=$ y, CD $=$ r, BD $=$ t $= \sqrt{yy+rr}$. Quantitas autèm r datur per y, proptèr datam curvæ BL, ejusque tangentis

na-

naturam. Ducta autem Cg ipsi CG infinitè proxima, & arcu infinitè parvo bd, si fiat GC, Gg :: CB, bd $= \frac{ydx}{a}$, deindè Bd, db :: BC, CF, $= \frac{yydx}{ady}$, undè BF proptèr rectum angulum BCF $= \frac{y\sqrt{yydx^2 + aady^2}}{ady}$ DF verò $=$ CF $-$ CD $= \frac{yydx - rady}{ady}$, & multiplicando BC per $\frac{1}{2}$ DF, fiet triangulum DFB æquale $\frac{y^3dx - raydy}{2ady}$, quo diviso per $\frac{1}{2}$ BD orietur OF $= \frac{y^3dx - raydy}{tady}$, cujus quadratum demptum ex quadrato BF relinquit quadratū BO, quod erit igitùr $= \frac{y^4ttdx^2 + ttaayydy^2 - y^6dx^2 - rraayydy^2 + 2ary^4dxdy}{ttaady^2}$, in quo si substituas pro tt in numeratore valorem $rr + yy$ fiet precisè quadratum, cujus radix BO $= \frac{yyrdx + ayydy}{tady}$; debet autem BO esse ad OF ut c ad b, ergò $\frac{yyrdx + yyady}{tady}$, debet esse ad $\frac{y^3dx - raydy}{tady}$ ut c ad b, & pro indè erit æquatio $yycdx - racdy = byrdx + byady$, & hinc $dx = \frac{byady + racdy}{yyc - byr}$ æquatio differentialis primi gradus pro curva quæsita, in qua signa possunt interdùm

dùm variè esse locata, pro ut duæ tangentes BO, BF ad easdem, vel ad diversas axis partes ceciderint. Hunc valorem differentialis dx nempè quod sit $= \frac{baydy + cardy}{yyc - byr}$ si multiplices superiùs, & inferiùs per $cy + br$ fiet equatio quæsita pro curva BM, $dx = \frac{bacyydy + ccarydy + bbarydy + cabrrdy}{ccy^3 - bbrry}$, vel $= \frac{bacyydy + ccarydy + bbarydy + cabrrdy}{ccy^3 + bby^3 - bbrry - bby^3}$, undè ponendo $aa$ pro $cc + bb$, & $tt$ pro $rr + yy$, fiet $\frac{a^2rydy + ttcabdy}{aay^3 - ttbby} = dx$. Si angulus OBF fuerit rectus, evanescente $c$ fiet $dx = \frac{ady}{r}$, quod manifestiùs apparebit si utamur æquatione superiùs inventa $dx = \frac{byady + racdy}{yyc - byr}$.

## COROLL.

36 SI duæ quantitates c, & b, non essent constantes, sed data quavis lege variabiles, dummodò datæ per y, & constantes quot libuerit, ut si exempli gratia angulus OBF non constans, sed æqualis angulo CBO esse deberet, aut etiàm ipsius CBO duplus, vel etiàm alitèr infinitis modis, semper eadem æquatio locum habet, si per b, & c intel-

telligamus ſinum, & ſinum ſecundum anguli OBF, quicumque ille tandem ſit, & quamcumque legem ſervare debeat. Ut ſi OBF debuiſſet fuiſſe æqualis CBO, b & c deberent eſſe ad invicèm ut r ad y, vel ſi OBF = 2 CBO, tùnc c ad b fuiſſet ut $rr - yy$ ad $2yr$, & ſic in alijs infinitis caſibus.

# SECTIO II.

## *De Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus, quando conſtet illas eſſe integrabiles algebraicè.*

### *PROPOSITIO I.*

37 POſtquàm igitùr ad æquationem differentialem Lineç quæſitæ alicujus, per ſupra traditas, aùt per ſimiles, methodos pervenerimus, & illam integrabilem eſſe conſtet, hoc eſt conſtet, quod ſint invenibiles duæ quantitates algebraicæ, quarum differentialia invicèm æquata reſtituant priùs inventam çquationem, tùnc vel illæ duæ quantitates algebraicæ invicèm æquentur, vel ſingulis illis conſtansquædam ad arbitrium addatur, vel dematur (niſì aliqua quæſitæ lineæ data conditio hoc vetuerit) & ſummæ vel differentiç invicèm etiàm æquentur, utrovis enìm modo reſultabit çquatio algebraica pro linea quæſita, quam proindè Carteſiano more ex alterutra, vel utraque harum æquationum algebraicarum conſtruere licebit.

38 Nàm, reductis ſingulis æquationis con-

ſtruendę partibus ad unam dimenſionem ope diviſionis utrinquè inſtitutæ per eandem conſtantem, poſitiſque AB, Ab abſciſſis lineę quęſitæ, ſivè cujus differentialis æquatio datur, & poſito curvam DA eſſe talem ut ordinatę DB ſint æquales integralibus unius ex partibus datę æquationis (quæcumque tandèm ſint hæc integralia) ſimiliterque curvam CF talem eſſe ut ordinatæ BF ſint ęquales integralibus alterius partis æquationis datæ, ſitque bd ipſi BD infinitè proxima, fb verò ipſi BF, erunt (ductis DE, GF axi parallelis) duæ lineolæ Ed, Gf infinitè parvæ illę eædem quæ per duas æquationis datæ partes exprimuntur, quę proindè ubique erunt invicèm æquales. Cum enìm Ed, fG ſint differentialia linearum BD, BF, & cum lineæ BD, BF ſint integralia duarum partium ęquationis conſtruendæ, erunt Ed, fG ipſę illę partes ęquationis, quam debemus conſtruere, quæ cum per hypoteſim ſint ſemper ad invicèm æquales, erunt ipſe Ed, Gf, ſemper æquales. Adſunt igitùr duæ quantitatum ſeries BD, bd &c. BF, bf &c. tales ut augmentum unius cujuſvis quantitatis bd in prima ſerie ſuprà antecedentem BD, ſit æquale augmento correſpondentis quantitatis bf in ſecunda ſerie ſuprà ſuam antecedentem BF. Quot ieſcumque autèm habentur duæ tales ſeries, quarum termini per æquales differentias augeantur, hoc eſt terminus quivis unius ſeriei ſuprà ſuum antecedentem æque augeatur ac terminus

H 2 cor-

correſpondens ſecundę ſuprà ſuum, quotieſcumque dantur inquàm duæ tales ſeries, neceſsarium eſt quod unus quivis terminus primæ ſeriei ęqualis ſit ſuo correſpondenti in ſecunda ſerie, aùt quod ſaltèm ab illo differat quadam quantitate conſtante, quæ porrò eadem, ſit etiàm differentia inter quamvis aliam quantitatem primæ ſeriei, & ſuam correſpondentem in ſecunda. Quia enìm quantitates primæ ſeriei æque augentur, ac quantitates correſpondentes ſecundæ, ſi ſemèl tantùm quantitas una primæ ſeriei æqualis ſit correſpondenti quantitati ſecundæ, ſemper æquales erunt quantitates primæ, correſpondentibus quantitatibus ſecundæ ſeriei, proptèr æquale earum augmētum, aùt ſi ſemèl quantitas una primæ, ſuperaverit correſpondentem quātitatem ſecundæ ſeriei, vel ab illa deffecerit, ſemper eodem exceſſu, vel deffectu different ab invicèm quantitates ſingulæ prioris, & correſpondentes quantitates poſterioris ſeriei. Igitùr conditio quam habemus, pro curva conſtruenda, & quæ differentiali æquatione exprimitur, quod Ed ſit ubique æqualis Gf, ſalvatur tàm ponendo ubique BD = BF, quàm ponendo ſingulas BD, differre à ſingulis BF quodam conſtante valore arbitrario. Sunt autèm BD, BF integralia duarum partium datę æquationis, igitùr, vel ponas hæc integralia ad invicèm æquari, vel eorum conſtantem eſſe arbitrariam quamuis differentiam, ęquæ ſalvabis differentialem

ęqua-

ęquationem propoſitam, hoc eſt ęque obtinebis quæſitam curvam. Hocque ratiocinium, nullatenùs requirit quod BD, BF ſint quantitates algebraicæ, ſed cujuſvis ſint generis lineæ, ſemper vim ſuam poteſt obtinere. Conſideramus autèm hìc peculiaritèr integralia algebraica, quia, cum talia ſunt, eorum valores invicèm æquati, addita quavis ad arbitrium conſtante, algebraicam ſuppeditant æquationem juxtà notas regulas conſtruendam, quod longè alitèr ſe habet, cum integralia non ſunt algebriaica, ut ſequentibus ſectionibus videre poterimus.

## COROLLARIVM.

39 HÆc conſtantis additio, quæ fieri ſemper poteſt poſt integrationem ęquationis, interdùm curvam natura invariatam, poſitione tantùm promovet, interdùm curvæ ipſius eſſentiam, & genus mirum in modum diverſificat. Si enìm exiſtentibus x vel y ordinatis rectis invicèm parallelis, ęquatio differentialis propoſita ad conſtruendum ab una parte habuerit dx vel dy tantùm, & ſimùl fuerit algebraicè integrabilis, dùm interìm x vel y alteram ęquationis partem non ingrediatur, in hoc caſu æquationi, quæ per illius integrationem obtinebitur addendo, vel demendo conſtantem, curva eadem remanet, ab axe tantùm remotior, vel illi pro-

proximior facta, per totam quantitatis illius constantis longitudinem. Res erit clarior, & certa si illam exemplo explicemus. Esto æquatio construenda $dy = \frac{dx\sqrt{aa+ax}}{a}$. Hęc si integretur dabit $y = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax}}{3a}$, vel $y \pm a = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax}}{3a}$, quod pro nùnc syntheticè poterimus experiri. Harum duarum ęquationum prima exprimit quamdam curvam, quæ si sic removeatur ab axe super quo assumuntur abscissæ x, aùt ad illum accedat per distantiam a, hoc est singula ejus puncta accedentia ad axem, vel ab illo recedentia, lineas describant ordinatis parallelas, & longitudinis a, jàm æquatio, quę referet curvam sic translatam ad eundem axem, ad quem prius referebatur erit $y \pm a = \frac{2a+2x\sqrt{aa+ax}}{3a}$, undè hæc ęquatio eandem quam prior illa curvam exprimit, sed positione tantùm diversam. At si æquatio fuisset exempli gratia $ydy = \frac{x^3dx}{aa}$ in qua nec dy nec dx unam æquationis partem constituere potest, salva æquationis integrabilitate, tùnc constantis additio, curvam maximè variare poterit. Integrando enim æquationem fit $\frac{yy}{2} = \frac{x^4}{4aa}$ vel $\frac{yy}{2} \pm aa = \frac{x^4}{4aa}$, ex quibus

ęqua-

ęquationibus oritur vel $y = \frac{xx}{\sqrt{2aa}}$, vel $y = \sqrt{\frac{x^4 \pm 4a^4}{2aa}}$ qui ordinatæ valor non differt per conſtantem ab alio valore $\frac{xx}{\sqrt{2aa}}$ vel $\sqrt{\frac{x^4}{2aa}}$. Idem dices ſi coordinatæ x, & y non eſſent rectę, aut applicatę non eſſent invicèm parallelæ, quibus caſibus infinitis modis variari poteſt curvę natura per ſimplicem conſtantis additionem uni ęquationis parti adhibitam.

## *COROLL. II.*

40 CUm igitùr arbitraria ſit conſtantis hujus additio, poterimus per quòdvis datum punctum curvam lineam ducere, dati axis, & verticis quę ſalvet datam ęquationem differentialem primi gradus algebraicè integrabilem, hac uſi methodo, quam clariùs exponi non poſſe cenſeo, quã ſi illam tradamus exemplo alicui applicatam. Aſſumamus, ęquationem differentialem datam eſſe $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, & debeat duci linea ſatisfaciens huic ęquationi differentiali, quę tranſeat per datum punctum, per quod exempli gratia ordinata ſit $= b$, & abſciſſa $= c$, cujuſvis ſint generis coordinatę, vel ſcilicèt rectę, vel curvę, vel invicèm parallelę, vel à cõmunibus punctis egredientes, vel ad angulos quoſvis ad ſe invicèm inclinatæ &c. Inte-

tegretur æquatio proposita, & erit $\frac{yy}{2} = a\sqrt{aa + xx}$.

Nùnc quærendum est, quænam constans ex infinitis, quæ addi possunt utrique æquationis parti addenda nunc sit, ut curva hæc transeat per punctum cujus coordinatæ sunt b & c, b quidèm de serie ipsarum x, c verò ipsarum y. Vocetur hæc constans zz, & erit $\frac{yy}{2} + zz = a\sqrt{aa + xx}$, undè $y = \sqrt{2a\sqrt{aa + xx} - 2zz}$, debet autèm quando x est b, y esse = c, ergò si in quantitate $\sqrt{2a\sqrt{aa + xx} - 2zz}$ ponamus b pro x fiet $\sqrt{2a\sqrt{aa + bb} - 2zz} = c$, undè $cc = 2a\sqrt{aa + bb} - 2zz$, & tàdè, $zz = \frac{2a\sqrt{aa + bb} - cc}{2}$, quæ est quantitas constans addenda in integratione æquationis, ut curva per datũ punctũ transeat, sicque curva quesita erit $\frac{yy + 2a\sqrt{aa + bb} - cc}{2} = a\sqrt{aa + xx}$, cui competit differentialis æquatio proposita $ydy = \frac{axdx}{\sqrt{aa + xx}}$, quæque simùl per datum punctum transit. Si valor quantitatis zz prodiret imaginarius, quod accidere potest, nulla curva per datum punctum ducibilis foret ad datam æquationem differentialem convenientèr in dato axe & vertice.

Exem-

*Exemplum.*

41 INvenire curvam cujus ſubſtangens aùt ſit media intèr coordinatas x,& y, aùt duarum mediarum vel prima, vel ſecunda, aùt uno verbo ſit una ex ſerię continvarum geometricè proportionalium quarum prima ſit x, ultima y, & termini ſint nnmero $m + 2$, ut numerus datus exprimens quota ſit in hoc ordine vocetur $n$. Intèr x,& y ſi ponantur $m$ numero mediæ proportionales, fiet ſeries ex qua debet deſumi valòr ſubtãgentis quæſitæ curvę, erit enim ſeries cujus primus terminus x, ultimus y, & temini erunt numero $m + 2$, quia duobus x, & y accedunt alij numero $m$, qui illis interponuntur. Notum eſt autèm, quod ſi intèr duas x,& y interponantur $m$ numero medię proportionales, erit harum mediarum prima, quæ in ordine ſeriei ſecundus erit terminus $= x^{\frac{m}{m+1}} y^{\frac{1}{m+1}}$, porrò ſecunda mediarum erit hujus quadratum, per x diviſum, tertia erit cubus per xx diviſus, & quæ mediarum erit (ut ita dicam) $\overline{n-1}^{\,\text{eſima}}$, exprimetur per poteſtatem $\overline{n-1}^{\,\text{eſimam}}$ hujus prioris mòx expoſitæ diviſam per poteſtatem $\overline{n-2}^{\,\text{eſimam}}$ literæ x. Quæ verò mediarum eſt $\overline{n-1}^{\,\text{eſima}}$, illa eſt in ordine ſeriei $n^{\text{eſima}}$, quæ æquari debet ſubtan-



gen-

genti ex vi datæ hypotheſeos. Fiat igitùr talis poteſtas hujus lineæ $x^{\frac{m}{m+1}} y^{\frac{1}{m+1}}$, & dividatur per poteſtatem lineæ x à numero $n-2$ denominatam, & erit $x^{\frac{m-n+2}{m+1}} y^{\frac{n-1}{m+1}}$ æqualis ſubtangenti. Undè $\frac{ydx}{dy} = x^{\frac{m-n+2}{m+1}} y^{\frac{n-1}{m+1}}$, undè oritur æquatio $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx = y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$, quę ęquatio eſt integrabilis ; omnis enìm poteſtas indeterminatæ in differentiale indeterminatę ejuſdem ducta quantitatem integrabilem conſtituit, cujus integrale eſt eadem poteſtas ejuſdem indeterminatę unitate tamèn aucta, & per exponentem ejuſdem poteſtatis unitate ſimilitèr auctum diviſa. Integrale ex $= z^r dz$ eſt $\frac{z^{r+1}}{r+1}$, quod facilè experieris ſyntheticè, & ſi porrò ſecunda differentiationis legem attentè proſequamur, poterimus hoc etiàm à priori, & ex rei natura nobis ſuadere. Eâdem igitùr de cauſa integrale ex $x^{\frac{n-m-2}{m+1}} dx$ erit $\frac{m+1\ x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$, & integrale ex $y^{\frac{n-m-2}{m+1}} dy$ erit $\frac{m+1\ y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$, quæ duo differentialia invicèm

ęquenæquentur, aùt addatur quævis conſtans ad libitum, orientur æquationes algebraicæ pro curva quam quærimus; & erit vel $\dfrac{\overline{m+1}\; x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1} = \dfrac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$

vel etiàm $\dfrac{\overline{m+1}\; x^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1} \mp a^{\frac{n-1}{m+1}} = \dfrac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}}}{n-1}$.

Harum duarum æquationum prima reducitur ad $x = y$, ſecunda verò, factis debitis operationibus, reducitur ad $\dfrac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \overline{n-1}\; a^{\frac{n-1}{m+1}}}{m+1} = x^{\frac{n-1}{m+1}}$,

ex qua extrahendo radicem cujus exponens eſt $\dfrac{n-1}{m+1}$, eruetur valor ipſius x qui erit radix exponentem habens $\dfrac{n-1}{m+1}$ extracta ex illa quantitate ſupracitata

$\dfrac{\overline{m+1}\; y^{\frac{n-1}{m+1}} \pm \overline{n-1}\; a^{\frac{n-1}{m+1}}}{m+1}$. Hæ duæ ęquationes, ſi conſtruantur, lineas ſuppeditant omninò diverſas; clarum eſt enim primam $x = y$ eſſe rectam in angulo ſemirecto ad axem, ſi ordinatæ axi normales ponantur, quęcumque ſint poteſtates $n$, & $m$; at verò aliam æquationem eſſe pro curva quadam, quæ varia eſt pro vario numero $m$ mediarum intèr x, & y cadentium, & etiàm pro varia poteſtate $n$.

Exempli gratia, si subtangens debeat esse in quatuor proportionalium serie secunda, sivè debeat esse prima duarum mediarum proportionalinm, quæ sunt intèr x, & y, tùnc existente $m = 2$, & $n = 2$, æquatio invenietur esse $\underline{3\sqrt[3]{y} \pm \sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{x}$, sivè

$$x = \frac{27y + 9\sqrt[3]{aay} \pm 27\sqrt[3]{ayy} \pm a}{27}.$$

## COROLL.

42 Regula pro integrandis quibusvis alicujus indeterminatę potestatibus, quam mòx attulimus, si potestas sit $-1$, nõ deducet ad integrale assignabile, quia si habeatur $y^{-1}dy$, quæ sit integranda, & traditam regulam adhibeamus augendo unitate exponentem $-1$ & dividendo deindè potestatem ipsius y per eundem exponentem $-1$ unitate auctum, ut pręcipit regula allata, fiet integrale $= \frac{y^{0}}{0}$ sivè $= \frac{1}{0}$ quantitas infinita, & inassignabilis. Quarè hic tantùm casus excludendus venit à regula, quam dedimus, & ab exemplo superiùs adhibito, quo usq; hoc integrale quantitatis $y^{-1}dy$ diligentèr ex pendamus, quod suo loco sumus facturi.

Exem-

### *Exemplum II.*

43 Curva quæratur, quę ſubtangentem habeat quantitaté $a^{1-m}y^m \pm b^{1-n}y^n \pm c^{1-r}y^r$ &c. quantitatem ſcilicèt compoſitam ex quotvis membris in quorum ſingulo y reperiatur ad aliquam dimenſionem elevata, per quævis ſigna invicèm junctis; erit æquatio $\frac{ydx}{dy} = a^{1-m}y^m \pm b^{1-n}y^n$ &c. & $dx = a^{1-m}y^{m-1}dy + b^{1-n}y^{n-1}dy + c^{1-r}y^{r-1}dy$ quæ æquatio integrabitur, dummodò unicuivis membro $a^{1-m}y^{m-1}dy$ applicetur methodus propoſitionis præcedentis pro integrandis poteſtatibus indeterminatarum, erit igitùr $x = \frac{a^{1-m}y^m}{m} \pm \frac{b^{1-n}y^n}{n}$

$\pm \frac{c^{1-r}y^r}{r}$ &c. procedendò ſemper per eadem veſtigia, quicumque ſit horum membrorum numerus. Quod ut peculiari quodam exemplo illuſtretur opus eſt tantùm quantitatem $a^{1-m}y^m \pm b^{1-n}y^n$ &c. determinare, determinatis duabus literis *m*, & *n*, ut *m* ſit $= 2$, $n = 4$, ſicque ſubtangens eſſe debebit (poſitis quantitatibus a & b eſſe invicèm ęqualibus, & vocando illas b) $\frac{bbyy - y^4}{b^3}$, & ęquatio differentialis $dx = \frac{bbydy - y^3dy}{b^3}$, undè integrando

x=

$x = \frac{bbyy}{2b^3} - \frac{y^4}{4b^3}$, vel $x = \frac{2bbyy - y^4}{4b^3}$. Quo pacto etiàm si subtangens debuisset fuisse $\frac{yy}{a} + \frac{y^5}{a^4}$, aùt $\frac{a^3yy + y^5}{a^4}$, æquatio per hanc regulam inventa fuisset $x = \frac{5a^3yy + 2y^5}{10a^4}$. Harum curvarum primam *Fig.6.* exprimit Figura sexta in qua curva EFACD &c. talis est, ut ejus subtangens BT in axe AB sit semper $\frac{bbyy - y^4}{b^3}$, positis $AB = x$, $BD = y$. In hac curva AG maxima x est $= \frac{1}{4} b = \frac{1}{4} AK$, AH verò $= \sqrt{2bb}$. Punctum contrarii flexus est in C per quod ordinata $CB = \sqrt{\frac{1}{3} bb}$, & abscissa $AB = \frac{5}{36} b$. Curvâ verò *Fig.7.* alteram nempè $x = \frac{5a^3yy + 2y^5}{10a^4}$ exhibet figura septima curvæ enìm IACGDE tangens IT abscindit ex axe HA subtangentem $HT = \frac{a^3yy + y^5}{a^4}$ ut requirebatur, positis $AH = x$, $HI = y$. Habet etiàm hęc contrarium flexum in C, posita $AB = \sqrt[3]{\frac{1}{4} a^3}$, & $CB = \frac{2}{10} \sqrt[3]{\frac{1}{12} a^3}$, est autèm $AF = a$ cui competit maxima abscissa x, sive $GF = \frac{3}{10} a$. Secat hæc curva axem AD in D, posita $AD = \sqrt[3]{\frac{5}{2} a^3}$.

CO-

## COROLL.

44 EX omnibus poteſtatibus indeterminatæ y, quæ ſubtangentis valorem ingrediuntur, poſſunt aliquæ, vel omnes eſſe etiàm negativæ, cum $m$, $n$, $r$, &c. numeros etiàm negativos æquè benè ac poſitivos poſſint repręſentare. Sed nullum adeſſe debet membrum in quo y non adſit, ſivè in quo exponens literæ y ſit o, quia facta æquatione $\frac{ydx}{dy} = a^{1-m}y^m \pm by^{1-n}y^n$ &c. ſi vel $m$, vel $n$ eſſet o in illa reducenda adeſſet $ay^{-1}dy$, vel $by^{-1}dy$ quod æquationem non algebraicè integrabilem redderet, ut in præced. Coroll. notatum eſt. Pro exemplo exponentium negativorum aſſumatur curva CBHL, cujus ſubtangens exprimatur per $aay^{-1} - a^3y^{-2}$, ſivè per $\frac{aay - a^3}{yy}$, æquatio enìm differentialis erit $dx = \frac{aaydy - a^3dy}{y^3}$, hoc eſt $dx = aay^{-2}dy - a^3y^{-3}dy$, quæ membra ſingula per allatam regulam integrabuntur, & fiet $x = \frac{-aa}{y} + \frac{a^3}{2yy} = \frac{a^3 - 2aay}{2yy}$. Curva hæc duas habet partes CBHL, & FM, quarum utraque ad aſymptotos KN, GD. Utriuſque autèm partis ſubtangens, tàm ſcilicet GT, Fig. 8,

quàm

quàm ED, optimè exprimuntur, per $\frac{aay - a^3}{yy}$ positis GB, EF $=$ y, AE $=$ x. Portio autem CBHL asymptotum secat in C, ità ut AC sit futura $\frac{1}{2}$ a. Existente AI $=$ a, & IH $=$ $\frac{1}{4}$ erit punctum H summus vertex, punctum verò L contrarii flexus habet AK $=$ $\frac{3}{2}$ a, & KL $=$ $\frac{4}{9}$ a.

*COROLL. II.*

45 OMnes hæ curvæ hujus, & antecedentis exempli sunt ex ijs quarum æquationibus constans addita, positionem tantùm earum potest variare, quia dx sola unam æquationis integrabilis partem constituit.

*Exemplum III.*

46 QVæritur curva cujus subnormalis sit $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$; erit igitùr æquatio differentialis curvæ quæsitę $ydy = \frac{xdx\sqrt{aa+xx}}{a}$. Et integrando fiet $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{xx+aa}\sqrt{aa+xx}}{3a}$, aùt etiàm $\frac{yy}{2} = \overline{xx+aa}\sqrt{aa+xx} \pm$ quavis constante; hæc constans brevitatis causa sit $=$ aa, erit igitùr altera curuæ æquatio differẽtialis yy

$= 2xx$

$= \frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{aa+xx} \pm 6aaa}{3a}$. Si utamur prima æquatione $yy = \frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{aa+xx}}{3a}$, fiet curva GKZ talis, ut *Fig. 9.* ejus ſubnormalis EW in axe AW in quo aſſumuntur ipſæ x (exiſtentibus ſcilicèt $AE = x$, $EG = y$) ſit, pro ut poſtulatur $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$. Curva hęc duas habet partes utrinquè ab axe AK ſitas ſibique ſimiles, & æquales GK, KZ, & minima y eſt AK cum $x = 0$, & $AK = \sqrt{\frac{2}{3}aa}$. Habet etiàm ad alteras axis AW partes aliam partem SMQ omninò ipſi GKZ ſimilem, & æqualem, ſimiliterque poſitam; ſi verò uſi fuiſſemus æquatione $yy = \frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{xx+aa} + 6a^3}{3a}$ curva eſſet HIY priori GKZ aſymptotica minimam ordinatam habens in axe AI ad diſtantiam $AI = \sqrt{\frac{8}{3}aa}$, haberetque hæc etiàm curva partes HI, IY, ſibi æquales ſimileſque, & partes etiàm ſaltèm HIY, VPR ſibi æquales, & ſimiles. Demùm æquatio $\frac{\overline{2xx+2aa}\sqrt{aa+xx} - 6a^3}{3a} = yy$, poſito ſemper ut antè abſciſſas x ſumi ab A in axe AW, ſuppeditat curvam XDF prioribus etiàm aſymptoticam, axemque AW ſecantem in D (unde illa incipit) ut ſit $AD = \sqrt{\sqrt[3]{9a^6} - aa}$ habentemque, non tantùm portionem XD ſimilem, æqualemq; portioni DF, ſed & aliam partem NLO ſimilem æqualemque parti XDF, ità ut omnes curvæ quas in figura nona ruditèr deſignavimus quæſito ſint ſatisfacturæ, & ducta ordinata EFGH, & tangentibus FB, GC, HT, earum normales FW, GW, HW in uno eodemque axis puncto W ſint coituræ ut ſit EW $= \frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$. Curva HIY habet ſanè aliam portionem, quę circà axem DL in Ellipſis quaſi formam jacet, & à puncto D uſquè ad L protenditur, abſcindendo in axe IP, ab A versùs I, & ſimilitèr ab A versùs P portiones $= \sqrt{\frac{4}{5}aa}$; verùm hanc delineare in figura prętermiſimus, quòd illa, licèt ęquatione eadem, ac portio HIY optimè exprimatur, ſubnormalem tamèn habeat $- \frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$ non verò $\frac{x\sqrt{aa+xx}}{a}$, ut requirebatur.

47 Eſt tamèn longè univerſalius Theorema, quod pro integrandis varijs quantitatibus inſervit, quodque univerſaliore exemplo claudemus. Eſto curva invenienda cujus ſubnormalis ſit expreſſa per $\frac{x^{m-1}\sqrt[n]{c^{m+1}+bx^{m}}}{a^{\frac{m+1+mn-2n}{n}}}$. Fiet ęquatio differentialis $ydy = \frac{x^{m-1}dx\sqrt[n]{c^{m+1}+bx^{m}}}{a^{\frac{m+1+mn-2n}{n}}}$, quę erit integrabilis, &

in-

integrando erit $\frac{yy}{2} = \frac{n:\overline{c^{m+1}+bx^{m}}\,\sqrt[n]{\overline{c^{m+1}+bx^{m}}}^{\frac{m+1+mn-2n}{n}}}{\overline{n+1}:m:b;a}$

$\pm$ gg si lubeat, quod experiri possumus ut ostendamus; denotant autèm $m$, & $n$ numeros quosvis cujusvis naturæ. Exempli loco sint $m = 3$, $n = 2$, sivè subnormalis quæsitæ curvæ sit $\frac{xx\sqrt{c^4+bx^3}}{a^3}$, æquatio pro curva quęsita est $\frac{yy}{2} = \frac{2c^4+2bx^3\sqrt{c^4+2bx^3}}{9ba^3}$ aût si $m = 4$, & $n = -2$, ut subnormalis sit $= \frac{x^3}{\sqrt{a^4+x^4}}$ (posito omnes c, a, & b esse invicèm æquales brevitatis gratia) erit ęquatio curvę per traditam regulam derivata $yy = \sqrt{a^4+x^4}$ vel $yy = \sqrt{a^4+x^4} \pm aa$.

## *Exemplum IV.*

48 SI subnormalis quęsitę curvę esse debeat $\frac{x^3}{a\sqrt{aa+xx}} = \frac{ydy}{dx}$, erit ęqua. $\frac{x^3\,dx}{a\sqrt{aa+xx}} = ydy$ undè integrando erit $\frac{yy}{2} = \frac{xx-2aa\sqrt{aa+xx}}{3a}$. Universaliùs posita ęquatione $ydy = \frac{x^{4n-1}\,dx}{b^{3n-2}\sqrt{a^{2n}+x^{2n}}}$, erit integrando $\frac{yy}{2} = \frac{x^{2n}-2a^{2n}\sqrt{a^{2n}+x^{2n}}}{3nb^{3n-2}}$. Et demùm

etiàm

etiàm universaliùs, si fuerit æquatio proposita $ydy = \frac{x^{4n-1}dx}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}\sqrt[m]{a^{2n}+x^{2n}}}$, integrando invenietur $\frac{yy}{2} = \frac{\overline{x^{2n}-\frac{ma^{2n}}{m-1}} : \overline{a^{2n}+x^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}\, b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}}$ plùs vel minùs $cc$ si libuerit; at si fuisset ęquatio data $ydy = \frac{x^{4n-1}dx}{b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}\sqrt[m]{x^{2n}-a^{2n}}}$, erit integrando $\frac{yy}{2}$

$$= \frac{\overline{x^{2n}+\frac{ma^{2n}}{m-1}} : \overline{x^{2n}-a^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}\, b^{\frac{4mn-2n-2m}{m}}} \pm cc,$$ si libuerit.

*Exemplum V.*

49 SI integranda sit $\frac{dy\sqrt{y} - dy\sqrt{a}}{\sqrt{2\sqrt{ay}-a}} = dx$, erit ęquatio integralis (ut ritè experiri possumus) $x = \frac{2y - 2\sqrt{ay} - 2a : \sqrt{2a\sqrt{ay} - aa}}{3a}$, sivè universaliùs

liùs ad integrandum $dx = \frac{y^{3n-1}dy - y^{2n-1}a^n dy}{\sqrt{2y^n a^{5n-2} - a^{6n-2}}}$

esset integrale $x = \frac{\overline{2y^{2n} - 2y^n a^n - 2a^{2n}} : \sqrt{2y^n - a^n}}{10n\, a^{\frac{5n-2}{2}}}$,

& si equatio fuerit $dx = \frac{y^{3n-1}dy - y^{2n-1}a^n dy}{a^{2n-1+mn} : \overline{2y^n - a^n}^{1-m}}$, erit

facta integratione æquatio ejus integralis quęsita $x = \frac{\overline{2y^{2n} - 2y^n a^n - \frac{1}{m}a^{2n}} : \overline{2y^n - a^n}^{m}}{\overline{8n + 4mn} : a^{nm+2n-1}}$, & demùm

si æquatio fuerit $dx = \frac{y^{3n-1}dy - y^{2n-1}a^n dy}{a^{2n-1+mn} : \overline{ry^n - a^n}^{1-m}}$, erit

æquatio ejus integralis $x = \frac{\overline{mmrr + mrr\,y^{2n} + 2rm - rrmm - 2rrm\,a^n y^n + 2 - 2r - rm : a^{2n}} : \overline{ry^n - a^n}^{m}}{\overline{m^3n + 3mmn + 2nm} : r^3 : a^{nm+2n-1}}$

ut si esset exempli loco $dx = \frac{y^8 dy - a^3 y^5 dy}{a^7 \sqrt[3]{5y^3 - a^3}}$, in-

tegrando juxtà hunc ultimum canonem inveniremus $x = \frac{\overline{250y^6 - 340a^3 y^3 - 102a^6} : \overline{5y^3 - a^3}^{\frac{2}{3}}}{10000\, a^7}$

co-

## COROLLARIUM.

56 Consultò attulimus regulas hasce pro integrandis quantitatibus, quas una tantùm ingreditur indeterminata, ut $x^m dx$ & alias hujusmodi; quia magni sunt usus, & valdè conduceret hos canones, aliasque tales regulas in ordinem aliqualitèr redactas servare, quas tamèn unusquisque facilè sibi parare potest. Nulla enim hactenùs, quod sciam, inventa est methodus, quâ de proposita quavis quantitate (necdùm ęquatione) etiamsi unica tantùm indeterminata cum suo differentiali illam ingrediatur, tutò pronuntiari possit nùm illa algebraicè sit integrabilis necnè. Undè cum incidimus in quantitates tales, de quibus quærendum sit an sint integrabiles, magnum est subsidium ad hos canones recurrere, & scrutari an ulli eorum sit applicabilis quantitas illa. Hoc est unum ex præcipuis, quæ in Analysi hac adhùc desiderantur, methodus scilicèt, quâ dum proponitur quantitas quævis integranda, aùt ejus integrale algebraicum assignare, aut impossibilitatem ejus assignandi demonstrare doceamur. Quod si quis invenerit, se tandiù quæsitas hyperboles, circulique infinitasque alias quadraturas reperisse sciat, assignato scilicèt spatio rectilineo algebraico hyperbolicis, circularibusque spatijs prorsùs æquali, aùt de-

demonstrata ejus impossibilitate, de qua cum multi multa scripserint, eamque solidè se ostendisse præsumpserint, nondùm omnem rei difficultatem exhaustam esse dubitamus.

# SECTIO III.

## *De Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus, quando non ſint algebraicè integrabiles, &, pretèr utriuſque indeterminatæ differentialia ad altiorem poteſtatem non elevata, continent alterutram tantùm indeterminatarum.*

### *PROPOSITIO I.*

51 ACcidit ſæpenumerò, ut data curvæ quam quærimus conditio talis ſit, quæ ad æquationem differentialem primi gradus nos deducat non integrabilem algebraicè, ſed quæ tamèn utriuſque indeterminatæ differentialia (quę neceſſarium eſt in ęquatione differentiali inveniri) ſimplicia, ſivè ad primam tantùm dimenſionem elevata habeat, & inſupèr unam tantùm indeterminatarum, altera omninò ex æquatione ejecta, contineat. Quo in caſu curvę quęſitæ conſtructio independentèr à quadratura ſpatii cujuſdam, quod mox inveniemus, haberi non poterit, aùt ſaltèm dependebit ab alterius cujuſdam problematis ſolutione, eandem hanc quadraturam involuerit.

52 Om-

52 Omnis æquatio in qua unica tantùm indeterminatarum inveniatur, prætèr utriusque indeterminatę differentialia ad majores potestates non elevata ad hanc formam reducibilis erit $dz = qdu$. Voco scilicèt $z$ indeterminatam illam, cujus in æquatione differentiale simplex sivè ad primam tantùm potestatem elevatum reperitur, & pręthereà nullo modo illa in æquatione apparet; $u$ verò est altera indeterminata, quæ cum suo differentiali æquationem ingreditur. Cum igitùr ex omni ęquatione, cujusvis quantitatis quę in illa est valor aliquo modo sit eruibilis, maximè autèm quantitatis, quę nullam potestatem altiorem nacta est, facilè erit differentialis $dz$ valorem elicere ex ęquationibus de quibus nùnc sermo est, ac proindè ad hos terminos reducere, ut $dz$ sola unam ęquationis partem constituat, reliqua verò pars sit productum alterius differentialis $du$ in quandam quantitatem, quam voco $q$, quę proindè erit nullo modo per $z$, sed per $u$, & constantes promiscuè data; est ergò $dz = qdu$ formula generalis pro omni ęquatione de qua nunc tractare intendimus. Quantitas autèm $q$, debet esse nullius dimensionis, ut salvetur lex homogeneorum, hoc est tot dimensiones habitura est in denominatore quot in numeratore, nisi unitas subintelligatur.

53 Igitùr pro constructione quæsita; curva describatur AC, cujus abscissis AB existentibus $= u$ or- *Fig.* 10

dinatę ad axem perpendiculares ſint aq, tùm verò ſpatio ABC, quod continetur curva ſic deſcripta, & duabus quibuslibet in illa coordinatis AB, BC diviſo per conſtantem rectam lineam a ponatur ubiq; æqualis ordinata BD ad punctum B, eritque D ad quæſitam curvam. Eſt enim AB = u, BC ex hypoteſi = aq, BD = z. Spatii ABC elemẽtum erit aqdu, quarè ſpatii hujus diviſi per conſtantem a elementum erit qdu. Igitùr omnium qdu ſumma, ſivè $\int qdu$, hoc eſt ſpatium ABC æquat z ordinatam lineę AD = z, undè $z = \int qdu$, & $dz = qdu$, quæ eſt æquatio quam debueramus conſtruere.

*COROLL.*

54 SI loco ponendi ordinatam FG æqualem ſpatio AFE per a diviſo, & ordinatam HI æqualem ſpatio AHK per a itèm diviſo, & ſic dę cęteris, poneremus FL æqualem ſpatio FECB per a diviſo, & HM æqualem ſpatio HKCB per a etiàm diviſo, & ſic ubique ordinatæ fierent æquales, non correſpondentibus ſpatijs totalibus, ſed ſpatijs intèr coordinatas, & conſtantem ordinatam BC clauſis, adhùc de curva ſic deſcripta LMB, eadem differentialis æquatio valeret, ac proindè & illa non minùs ac prædeſcripta GIDA quęſito ſatisfaceret. Quod cla-

clarum sit consideranti AF esse = u, FE = aq elementum autem spatii FECB esse aqdu, idem ac elementum spatii totalis AFE; undè FL, quæ spatio EFBC per a diviso æqualis facta est, æquè vocari potest $\int$ qdu ac tota FG, quarè si tàm FL quàm GF vocetur z, erit utriusque curvæ GIDA, HB eadem differentialis equatio respectu ejusdem axis, & verticis, putà dz = qdu. Verùm curva LMB positione tantùm differt à curva GIDA, quia spatium EFBC differt ubique constante spatio à totali area EFA, undè & linea FG differet ubique, constanti eâdem differentia à linea FL. Quarè linea LMB, eadem est ac GID, quæ motu sibi ipsi parallela accessit ad axem per distantiam LG, & proindè positione tantùm differt à curva GIB.

## COROLL. II.

55 POssunt verò innumeræ assignari regulæ pro talium curvarum constructione, quas tamèn omnes in idem recidere opus est, sicùt pro inventione duarum mediarum proportionalium intèr duas datas quidquid tenemus, semper in parabolæ descriptionem, aùt analogum quid collimabit. Sic si dividatur quantitatis qdu quadratum qqdu² in duo quadrata ppdu², & rrdu², quorum radices pdu, rdu (si fieri possit, hoc est si quadratum quidem

ppdu² talis divisionis sit capax) sint integrabiles, clarum est, quod constructa curva, cujus coordinatæ sint hæc integralia quantitatum pdu, & rdu, erit longitudo curvæ sic descriptæ $=$ z ratio est, quod si ponatur talis curva cujus abscissæ sint integrales rdu, & ordinatæ inregrales pdu, erit elementum curvæ $= \sqrt{rrdu^2 + ppdu^2}$, cumq; ex hypothesi $rrdu^2 + ppdu^2$ faciant $qqdu^2$, erit elementum talis curvæ $=$ qdu, ergò $=$ dz, quarè reddit dz $=$ qdu proposita æquatio. Sed hæc regula, & quæcumque afferri possit pro constructione curvæ dz $=$ qdu, sempèr primæ constructioni æquivalebit, quia curvæ longitudo hac methodo adhibita, æquivalet spatio, quod secundum priorem methodum quadrare debemus; præterquamquod non apparet adhùc regula, qua omne quadratum $qqdu^2$ possit dividi in duo quadrata integrabiles radices habentia, quod tamèn si fieri posse quandoque constet in praxi est præeligendum, & constructio per rectificationes curvarum algebraicarum constructioni per quadraturas anteponenda est, quia practicè filo curvas facilè metimur, spatia verò non itèm. Iàm igitùr ad exempla descendamus.

*Exemplum.*

56 SIt invenienda curva, cujus subtangens sit constans. Ergò $\frac{ydx}{dy} = a$, & $dx = \frac{ady}{y}$. Frustrà au-

autèm tentabimus quantitatem hanc integrare algebraicè; licèt enim scribendo $ay^{-1}dy$, hęc quantitas contineatur sub canone $y^n dy$, attamèn, si regulâ illâ utamur quæ assignat $\frac{y^{n+1}}{n+1}$ pro integrali ex (nu. 41) $y^n dy$, inveniemus in hoc casu quo $n = -1$ integrale esse $\frac{ay^0}{0}$ sive $\frac{a}{0}$ quantitatem infinitam. Undè iàm alia via opus erit constructionem moliri. Continetur autèm hæc æquatio $dx = \frac{ady}{y}$ sub canonica æquatione $dz = qdu$, quia quæ ibì est z hìc est x, & quæ ibì u hìc y, & quæ ibì q hìc est $\frac{a}{y}$. Construenda est igitùr curva IHFE, cujus abscissis CD existentibus y, sint ordinatę $DE = \frac{aa}{y}$. Erit ergò curva IHFE sic constructa hyperbola æquilatera, asymptotos habens axem CD, & lineam CK axi perpendicularem per C, & cujus quadratum CAF sit aa. Quoniàm autèm curvæ quęsitæ ordinata est ęqualis spatio curva hac contento per a diviso, opus erit spatio totali asymptoto CK, curvâ, coordinatisque CD, DE comprehenso divisoque per a ęqualem ponere ordinatam quęsitæ curvę. Verùm spatium hoc infinitæ magnitudinis esse scimus. Ne igitùr constructio frustretur, cum dixerimus posse ab hoc spatio constans spatium semper tolli, assumamamus pro hoc ſpatio conſtante infinitum ſpatium quod aſymptoto KC, curva, duabuſque invicèm æqualibus coordinatis a ſivè CA, AF clauditur, nec ponamus ordinatam curvæ quam quęrimus ęqualem ſpatio quod aſymptoto CK, curva, & duabus quibuslibet coordinatis clauditur per a diviſo, ſed ſpatio tantùm, quod determinatur ordinata FA, curva, & duabus quibuslibet coordinatis CD, DE, quale eſſet ſpatium FADE. Huic igitùr ſpatio per a diviſo ſit æqualis recta DB, eritque punctum B ad curvam, cujus ſubtangens in axe CK erit data conſtans a. Eſt manifeſtum quod, ſpatio FADE evaneſcente quando CD reperietur eſſe $=$ CA $=$ a, tùnc erit DB $=$ o, punctumque a in curva quęſita. Deincèps ſi aſſumatur abſciſſa ut CL minor quam a, ſpatium FALH reſpectu ſpatii AFED eſt negativum, undè jàm ordinatę LG fient negativæ, curvaq; BAG quęſita axem ſecabit in A, & utrinque ab illo diverget in infinitum, ad partes verò G, non ultrà aſymptotum CK hyperbolę protendetur.

## COROLL.

57 NEmini dubium eſt quìn curva GAB ſic deſcripta, ut ejus ſubtangens in axe, ſeù aſymptoto CK ſit conſtans, ſit ipſa Logarithmica. Erunt igitùr lineę x, ſivè ordinatæ DB ipſarum y, ſivè DC logarithmi. Sunt autèm eædem DC

$=1$

$= \int \frac{ady}{y}$, ergò $\int \frac{ady}{y} = ly$, hoc eſt integrale ex $\frac{ady}{y}$ erit ipſe logarithmus quantitatis y ſumptus in logiſtica cujus ſubtangens ſit $= a$. Deincèps igitùr, cum integranda fuerit quantitas aliqua $\frac{ady}{y}$, ſcribemus pro ſuo integrali ly, ſivè logarithmum ex y, advertendo debere logarithmum aſſumi in logarithmica CAB cujus ſubtangens ſit $= a$, & eadem de cauſa integrale ex $\frac{ady}{a+y}$ erit $l\,\overline{a+y}$. Aùt viceverſa, cum differentiandus fuerit ly, aſſumptus in logarithmica, cujus ſubtangens, vel parameter ſit data quęvis a, ſcribemus pro differentiali $\frac{ady}{y}$. Hinc methodus differentiandi $ly^n$, ſivè poteſtatem quamvis (pro cujus indice pono $n$) logarithmi indeterminatæ y, erit enim differentiale $\frac{n\,ly^{n-1}\,ady}{y}$, ex regulis calculi differentialis communibus, dummodò tantùm ubi deberet poni differentiale logarithmi, ponatur $\frac{ady}{y}$. Sic novas curvas, curvarumque ſpecies excogitare jàm potes, quarum tangentes invenire, evolutaſque deſcribere, ex hac methodo poterimus, ut ſi fuerint curvæ $x = \frac{ly^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{m-n}{n}}}$ ubi $n$, & $m$ quoſvis nu-

numeros integros designent, erit $dx = \dfrac{\frac{n}{m}\, ly^{\frac{n-m}{m}}\, dy}{a^{\frac{n-2m}{m}}\, y}$,

undè subtangens $= \dfrac{\frac{n}{m}\, ly^{\frac{n-m}{m}}}{a^{\frac{n-2m}{m}}} = \dfrac{nax}{mly} = \dfrac{nx^{\frac{n-m}{n}}\, a^{\frac{m}{n}}}{m}$,

punctum verò flexus contrarii reperietur ubì $ly = \dfrac{n-m}{m}\, a$. Harum curvarum notabilis positio, quę pro varia numerorum $n$, & $m$ habitudine mirabilitèr variata reperitur concipere jubet spem, haud grave lectori fore, si non inutili fortè digressione paulispèr ipsis contemplandis immoremur.

58 Porrò triplex distinguendus est casus, qui accidere potest, posito semper logarithmos ipsarum y sumi in logistica, quam modo descripsimus, cujus a sit subtangens, ità ut logarithmus ex a sive ICA sit $= 0$. Vel enim numerator $n$ est impar existente denominatore $m$ pari, vel $n$ est par existente $m$ impari, vel demùm $n$, & $m$ ambo simùl sunt impapares. Quo ad primum casum, cum $n$ est impar, & $m$ par, si y sumatur minor quam a, erit iàm ly negativa quantitas, undè $ly^n$ erit negativa, quia potestas impar quantitatis negativæ est negativa, sed $ly^{\frac{n}{m}}$, hoc est radix (ut ita dicam) $m^{esima}$ negativi $ly^n$ erit imaginaria, quia radix par ex quantitate negativa est tantùm imaginaria, igitùr x erit imagina-

naria, & in hoc casu curva incipiet ab A, & nullam abscissam minorem quam a sortietur. Verùm si y assumatur ęqualis a, tùnc $ly = o$ undè si $\frac{n}{m}$ sit numerus positivus erit $x = o$, quia omnis potestas positiva ex o est o, si sit negativus erit x infinita, quia potestas negativa ex o est infinitum quid, & tùnc AL normalis ad CD per A erit asymptotus talis curvæ. Assumpta deindè y majore, atque majore quam a in infinitum, semper ly erunt positivi, crescentque in infinitum, undè ordinatæ curvæ nostræ crescent in infinitum siquidèm $\frac{n}{m}$ fuerit positivus, minuentur tamèn in infinitum si fuerit negativus, quo in casu evanescent omninò cum fuerit ly infinitus, sivè y infinita, quarè & CA in illo casu est curvæ asymptotus. Transferantur lineæ AC, AL, KC in figuram 12, & curva MN repræsentabit primum casum, nempè curvam $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ quando, existente $n$ impari, & $m$ pari, fuerit $\frac{n}{m}$ negativus. Curva hæc in qua $CD = y$, $DN = x$ nullam sortitur y minorem quam AC quæ est a, estque ad asymptotos AL, AC illis perpetuò convexitatem ostendens, nullo enìm contrarii flexus puncto insignis est, quia, existente $\frac{n}{m}$ negativa, erit $\frac{n}{m} - 1$, sivè $\frac{n-m}{m}$ negativa, (fig. 12.)

 un-

undè $\frac{n-m}{m}$ a, hoc est ly in puncto contrarii flexus erit negativus, undè y minor quam a, sed nulla est in his curvis y minor quam a, ergò nullum erit flexus contrarii punctum. Figura autem 13. ostendit (fig.13) curvam MN quando $\frac{n}{m}$ æquationis $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ est positivus unitate minor, posito *n* impari, & *m* pari. Nulla in illa CD, sivè y potest esse minor quam a; cæterùm transit illa per A, versùs AD semper concava, nec flexum contrarium, nec maximam minimamve ordinatam sortitur, tangitque illam AL in A. Dixi nullum adesse contrarii flexus punctum quia si $\frac{n}{m}$ minor est quam 1, erit $\frac{n-m}{m}$ negativa, & proindè, ut factum est suprà pro figura 12. ostendetur nullum reperiri hìc posse flexum. Tertium casum, quando in æquatione $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$, existente *n* impari, *m* pari fuerit $\frac{n}{m}$ positivus unitate major ostendit figura 14. (fig.14) in qua curva NM, quæ nullam abscissam habet minorem quam a tangitur ab axe AD in A, & cum priùs versùs illum convexa sit, flectitur deindè, & versùs eundem fit concava, quia in hoc casu $\frac{n}{m}$ existen-

sten-

stente majore quam 1 erit $\frac{n}{m} - 1$ vel $\frac{n-m}{m}$ positiva, & hinc $\frac{n-m}{m}$ a positiva, quæ cum sit ly in puncto contrarii flexus, erit hic ly positivus, undè y major quam a, hoc est abscissa puncti contrarii flexus major quam AC, undè reverà, & non imaginariè tantùm reperibile erit in hac curvarum specie.

59 Quando autèm, existente $n$ pari, fuerit $m$ impar numerus, tùnc vel existat y major, vel minor quam a, ità ut vel ly sit positivus vel negativus, semper $ly^n$ erit positivus quia $n$ est numerus par, & existente $ly^n$ positivo, erit $ly^{\frac{n}{m}}$ etiàm non modò realis sed positiva quantitas, undè & x, quæ est $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ erit realis, & positiva, vel y assumatur minor, vel assumatur major quam a. Posita porrò y = a, cum sit ly = o erit tùnc $ly^{\frac{n}{m}}$ infinita, cum $\frac{n}{m}$ fuerit negativus exponens, undè AL est asymptotus curvæ hujus in figura 15. nec erit $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ æqualis nihilo, nisi fuerit ly infinita, quod cum accidat, & posita y infinita, (fig. 15.) & posita y = o, sequetur curvam hanc in infinita di-

stantia à puncto C secturam esse axem AC, eundemque etiàm secare cum y est o sivè in ipso puncto C; habet igitùr curva hęc duas partes, MN unam ad asymptotos AD, AL positam, PO alteram, ad asymptotum AL, proindè asymptoticam & ipsam parti MN, & quæ secat AC in ipso sui initio C, secatq; ad rectos angulos, ità ut KC tangat illam, suntque ambę hæ partes ad easdem axis AC partes; contrarium flexum habet in parte PO, quia $\frac{n}{m}$ cum sit negativa, relinquet negativam quantitatem $\frac{n}{m} - 1$ sivè $\frac{n-m}{m}$, undè $\frac{n-m}{m}$ a sivè ly in puncto flexus contrarii est negativus, quod indicat abscissam y puncti illius esse minorem quam a, & punctum tale cadere in portione CPO. Si verò, *n* existente pari, *m* impari, & $\frac{n}{m}$ positivo, fuerit ille minor quam 1, curvam æquationis

(fig.16) $\dfrac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ ostendet figura 16. In hac curva quęcumque abscissa y assumatur etiàm si minor sit quam a, competet illi sua realis & positiva x, ut suprà diximus de curva figuræ 15. Porrò si ly infinita, erit & $ly^{\frac{n}{m}}$, & proindè x infinita, igitùr in puncto C & in puncto axis infinitè distante à puncto C erit ordinata infinita.

Si verò $y = a$, $ly = o$, erit $ly^{\frac{n}{m}} = x = o$, transit ergò per A curva hæc, quæ ad asymptotum CK esse debet ex visis, duasque habet portiones in communi illo puncto invicèm junctas APO, AMN & communem tangentem AL, & ad eandem axis AC partem locatæ sunt. Portio AMN est versus axem semper concava, sed portio APO, cum primò versus AC concava sit, flectitur ad alteras partes, & fit convexa, & ad asymptotum KC constitnta in infinitum intèr KC & AL protenditur. Ratio est quia $\frac{n}{m} - 1$ est negativus numerus sive $\frac{n-m}{m}$ a negativa quantitas quę cum sit ly pertinentis ad punctum contrarii flexus, erit y minor quam a, undè &c. Tandèm si $n$ fuerit par, $m$ impar, $\frac{n}{m}$ positivus & major quam 1, figura 17. utendum erit. Posita y minore quam a, sivè ly (fig. 17.) negativa, positiva tamèn erit $ly^{\frac{n}{m}}$ siuè x, & quidèm infinita quotiès ly sit infinita sivè y infinita sit vel sit o, quandoquidèm $\frac{n}{m}$ exponens positivus esse supponitur. Si ly sit o, erit & $x = o$, undè curva trãsit per pũctum A in quo ly est o, & y est a. Tangitur autèm ibì curva ab axe AC, & duas partes format quę ad easdem axis AC partes locantur quarum una APO, versùs AC continuò convexa reperietur, & ad asymptotum KC posita, altera AMN primò quidèm versùs

axem

axem illum convexitatem obvertit, mòx verò concavitatem, quia flexum habet ex eo quod $\frac{n-m}{m}$ a, qui est logarithmus ex abscissa puncti contrarii flexus est positivus (propter $\frac{n}{m}$ maiorē quā 1 hoc est $\frac{n}{m}-1$ positivam, & $\frac{n-m}{m}$ & $\frac{n-m}{m}$ a positivam) undè y major quam a; deindè curvæ portio AMN in infinitum ab axe AC versùs illum concava elongatur.

60 Tertius casus est, cum $n$ & $m$ ambo simùl numeri sunt impares. Et primò quidem est manifestum, quod si ly sit negativus, vel y minor quam a, $ly^n$ erit negativa, quia $n$ est impar numerus, erit verò positiva si ly sit positivus; $ly^{\frac{n}{m}}$ autèm erit vel positivus, vel negativus pro ut $ly^n$ fuerit vel positivus, vel negativus, quia radix impar potestatis imparis, est positiva, si quantitas illa sit positiva, negativa, si illa sit negativa, sed semper realis. Considerando igitùr primò casum quo $n$ &, $m$ existentibus imparibus sit $\frac{n}{m}$ negativa, repręsentare illum poterimus per figuram 18. Posito enìm in hoc casu ly esse infinitam, erit $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}=0$, undè in puncto C, (fig. 18.) in quo cum y sit o est ly infinita, & in alio puncto in axe AC infinitè distante à puncto C erit x = o

tran-

transit igitur curva per C, & est ad asymptotum AC. Porrò si ly $= 0$, erit ly$^{\frac{n}{m}}$ infinita; ergò in puncto A x erit infinita, & curva est ad asymptotum etiàm AL. Habet porrò curva hæc duas partes unam COP ad partes K axis AC locatam, per C transeuntem, adque rectum angulum axi AC insistentem, ad asymptotum autèm AL existentem, punctoque contrarii flexus affectam, quia si $\frac{n}{m}$ est negativa, erit & $\frac{n}{m}-1$ & $\frac{n-m}{m}$, & $\frac{n-m}{m}$ a, proindè & ly negativa, & y minor quam a; altera pars MN curvæ hujus est ad alteras axis AC plagas describenda, ad asymptotos AC, AL, semper versùs illas convexa, ut ostendit figura. Quando fuerit $\frac{n}{m}$ positivus, sed unitate minor, existentibus interìm utroque $n$, & $m$ impari, tùnc figura 19. exprimet (fig.19.) curvam æquationis $x = \frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{m-n}{m}}}$ duas partes habẽtem. Pars AMN quæ respectu axis AC ad plagam L jacet, semper concava est versùs axem illum, & ab illo in infinitum digreditur, tangiturque ab axe coniugato AL in puncto A perquod transit, eo quod cum $\frac{n}{m}$ sit positivus existente ly $= 0$ sivè y $=$ a, erit

$\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ ſivè $x = o$. Pars verò AOP, quæ ad alias reſpectu axis AC partes cadit quam alia portio MN, à puncto A exit, priuſque verſus AC concavam ſe facit, deindè flectitur, & convexa fit, ad aſymptotum KC ſe diſponens; quod debeat eſſe ad talem aſymptotum patet quia cum ly eſt infinita, ut in puncto C, debet eſſe infinita & $ly^{\frac{n}{m}}$ ſive x, quod contrarium flexum habeat patet qua $\frac{n-m}{m}$ ſivè $\frac{n}{m}-1$ exiſtente negativa (cum 1 major ſit quam $\frac{n}{m}$) eſt $\frac{n-m}{m}$ a ſivè ly negativa, & y minor quam a, ergò contrarius flexus pertinet ad curvæ portionem AOP cujus abſciſſæ minores ſunt quam a. Conſideremus ulteriùs caſum quo $\frac{n}{m}$ ſtatuitur poſitivus unitate major cum exiſtant $n$, & $m$ impares. Caſum deſignat (fig.20.) figura 20. curva duabus, & illa portionibus componitur utrinquè ab axe conſtitutis, quem ſecat, & tangit in A. Portio AOP eſt ad axem convexa, & ad aſymptotum KC, portio AMN, primò ad eundem axem convexa eſt, deindè concava, cum punctum flexus contrarii habeat. Reliquas curvarum proprietates, ex æquatione erues, has ſolùm attigiſſe juvat, ut appareat quam diverſis figurâ curvis eadem æquatio competere poſſit.

CO-

## COROLL. II.

61 Sicutì ex hac propositione methodus eruitur pro differentiandis quantitatibus, quas ingrediatur quantitas logarithmica, ità & calculi integralis complures regulę derivari possunt, quibus vice versa quantitates multas, quas logarithmica quantitas ingrediatur, poterimus integrare. In primis enim $\frac{ly^{n}dy}{y}$ est integrabilis, & integrale est $\frac{ly^{n+1}}{\overline{n+1}\,a}$, posita a subtangente logarithmicæ in qua assumuntur ly. Sic & integrabilis est $\frac{lydy\sqrt{aa+ly^{2}}}{y}$, & integrale est $\frac{\overline{aa+ly^{2}}^{\frac{3}{2}}}{3a}$. Uno autèm verbo omnes canones pro integrandis quantitatibus ordinarijs differentialibus quales sunt, quos tradidimus in pręcedenti sectione, valent etiàm si pro indeterminata, quæ in illis reperitur, ponatur quantitas logarithmica simplex ly, vel lx, dummodò quantitas dividatur deindè per y, vel x prout ly vel lx adfuerit in quantitate integranda. Sic quoniàm $\frac{y^{4n-1}dy}{\sqrt[m]{a^{2n}+y^{2n}}}$ est inte- (nu. 45.)
grabilis, erit & integrabilis $\frac{ly^{4n-1}dy}{y\sqrt[m]{a^{2n}+ly^{2n}}}$, substituendo ly pro y, & dividendo deindè quantitatem per

y; quia, cum y sit quantitas quævis indeterminata, si ejus loco ponatur alia quęvis, & pro dy ponatur deindè hujus alterius differętiale, adhùc integrabilitas servari debet in quantitate proposita; igitùr ponendo pro y aliam indeterminatam lx, vel lz, vel etiàm ly, & pro dy deindè differentiale ipsius ly, quod est $\frac{dy}{y}$ (posita brevitatis gratia 1 pro subtangente) fiet quantitas adhùc integrabilis, & integrale hujus quantitatis erit idem ac integrale illius, substituta tantùm ly pro y, undè sicut integrale ex

(nu. 49.) $\frac{y^{4n-1}dy}{\sqrt[m]{a^{2n}+y^{2n}}}$ est $\frac{\overline{-\frac{m}{m+1}a^{2n}+y^{2n}}\cdot\overline{a^{2n}+y^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}}$ ità integr. ex quantit. $\frac{ly^{4n-1}dy}{y\sqrt[m]{a^{2n}+ly^{2n}}}$ erit $\frac{\overline{-\frac{m}{m-1}a^{2n}+ly^{2n}}\cdot\overline{a^{2n}+ly^{2n}}^{\frac{m-1}{m}}}{\frac{4mn-2n}{m}}$

substituta tantùm in priori integrali, loco litteræ y, quantitate ly.

(nu. 50.) His addenda est regula pro integrando $ly^{n}dy$, vel universaliùs $y^{m}ly^{n}dy$, quæ ut in progressu patebit, eximium habet usum.

62 Propositum est igitùr, quoniàm de integrandis quantitatibus logarithmicis sermo est, omnium simplicissimam $ly^{n}dy$, vel universaliùs $y^{m}ly^{n}dy$ in-

 te-

tegrare; ponamus integrale quæsitum esse $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1}$, quale esset nisi $ly^n$ esset quantitas variabilis: vel igitur $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1}$ differentiata restituet $y^m\, ly^n\, dy$, vel non; si restituet, iàm erit illius integrale, & satisfactum erit quæstioni, assignato nempè quæsito integrali. Sed nisi restituat, & ejus differentiale præter quantitatem $y^m\, ly^n\, dy$, quid aliud contineat, quod vocetur du, signum erit quod assumpta quantitas $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1}$ non est integrale ex $y^m\, ly^n\, dy$, sed excedit integrale quod quęrimus ex proposita quantitate $y^m\, ly^n\, dy$, per totum integrale quantitatis du, quod est u. Et profectò differentiando $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1}$, oritur $y^m\, ly^n\, dy + \frac{n\, y^m\, a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1}$ (posito a esse subtangentem logisticæ) quod excedit propositam quantitatem $y^m\, ly^n\, dy$ per totam quantitatem $\frac{n\, y^m\, a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1}$, cujus proinde integrale demendum est ex quantitate $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1}$ ut habeatur verum integrale quantitatis $y^m\, ly^n\, dy$. Ut autem habeatur quantitatis $\frac{n y^m\, a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1}$ integrale, quod demendum esse mox vidimus ex quantitate $\frac{y^{m+1}\, ly^n}{m+1}$

 po-

ponamus illud esse $\frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ (quale esset nisi potestas $ly^{n-1}$ esset differentiabilis) & si reperiamus reverà quantitatem $\frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ esse integrale ex $\frac{ny^{m}\,a\,ly^{n-1}\,dy}{m+1}$, dememus illam ex quantitate $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$ pro ut faciendum esse mox ostendimus, & reliquum $\frac{y^{m+1}\,a\,ly^{n}}{m+1} - \frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ erit integrale ex $y^{m}\,ly^{n}\,dy$; at nisi $\frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ sit integrale ex $\frac{ny^{m}\,a\,ly^{n-1}\,dy}{m+1}$, sed ejus differentiale excesserit quantitatem hanc aliqua quantitate $du$, jàm est certum, quod nimis demptum est ex $\frac{y^{m+1}\,ly^{n}}{m+1}$ demendo quantitatem $\frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$, ac proindè addi debere id quod insupèr subtraximus, quod est $u$ integrale ex illo excessu $du$ quo differētiale quantitatis subtractæ $\frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ superat quantitatem $\frac{ny^{m}\,a\,ly^{n-1}\,dy}{m+1}$. Differentiando $\frac{ny^{m+1}\,a\,ly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$ pro-

dit

dit $\frac{ny^m a\, ly^{n-1}\, dy}{m+1} + \frac{n : \overline{n-1} : y^m aaly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2}$, quod excedit $\frac{ny^m aly^{n-1}\, dy}{m+1}$ integra quantitate $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aaly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2} = du$, hujus igitùr du integrale (ut ostendimus) addendum est ad $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{ny^{m+1} aly^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$, ut habeatur exactum integrale quantitatis propositæ ad integrandum $y^m ly^n dy$. Quantitatem porrò du vel $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aaly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2}$ integraturi, ut ejus integrale quantitati $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$ addamus, fiat iterùm, suppositio, quod ejus integrale sit illud quod scimus forè futurum si $ly^{n-2}$ non differentiaretur, ponamus nempè integrale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aa\, ly^{n-2}\, dy}{\overline{m+1}^2}$ esse $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} aa\, ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$, & si reverà fuerit, hoc integrale addendum est ad quantitatem $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1}$

— n

$-\frac{n : y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^2}$, & fiet exactum quantitatis $y^m ly^n dy$ integrale $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^2} + \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$, sed nisi fuerit, & differentiale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$ excesserit quantitatem integrandam $\frac{n : n-1 : y^m aa\, ly^{n-2} dy}{\overline{m+1}^2}$ quantitate du, debebit iterũ u integr. illius excessus demi ex serie illa $\frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} a\, ly^{n-1}}{\overline{m+1}^2} + \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$ ad habendum verum quantitatis $y^m ly^n dy$ integrale; experiamur igitùr iterùm an $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$ sit integrale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aa\, ly^{n-2} dy}{\overline{m+1}^2}$. Reperio differentiale ex $\frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} a^2 ly^{n-2}}{\overline{m+1}^3}$ esse quantitatem $\frac{n : \overline{n-1} : y^m aa\, ly^{n-2} dy}{\overline{m+1}^2} + \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^m a^3 ly^{n-3} dy}{\overline{m+1}^3}$, ac proindè continere $\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^m a^3 ly^{n-3} dy}{\overline{m+1}^3}$.

plùs

plùs justo, quarè hujus quantitatis integrale erit demendum iterùm ex serie ut verum integrale quantitatis $\frac{y^{m}\, ly^{n}\, dy}{}$ habeatur. Si iterùm pro integrali ex $\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m}\, a^{3}\, ly^{n-3}\, dy}{\overline{m+1}^{3}}$ scribatur

$\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1}\, a^{3}\, ly^{n-3}}{\overline{m+1}^{4}}$ (pro ut verè esset nisi differentialis ex $ly^{n-3}$ habenda esset ratio) atquè sic procedamus in infinitum eàdem lege quam hùc usque servavimus demendo scilicèt ex serie quantitatem hanc $\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1}\, a^{3}\, ly^{n-3}}{\overline{m+1}^{4}}$, quam ponimus legitimum integr. ex $\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m} a^{3}\, ly^{n-3} dy}{\overline{m+1}^{3}}$,

deindè addendo integrale excessus quo differentiale ex $\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1}\, a^{3}\, ly^{n-3}}{\overline{m+1}^{4}}$ superat

$\frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m}\, a^{3}\, ly^{n-3}\, dy}{\overline{m+1}^{3}}$, pro quo integrali

sempèr supponenda est hypothesis potestatem ex $ly$, quam in quantitate integranda inveniemus, esse constantem, si inquam hoc fiat, reperietur integrale completum ex $y^{m}\, ly^{n}\, dy$ per seriem infinitam exprimi putà $\int y^{m} ly^{n} dy = \frac{y^{m+1}\, ly}{m+1} - \frac{n : y^{m+1}\, aly^{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}$

$+ \frac{n:\overline{n-1}:y^{m+1}\,aaly^{n-2}}{\overline{m+1}^{3}} - \frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:y^{m+1}a^{3}ly^{n-3}}{\overline{m+1}^{4}}$

$+ \frac{n:\overline{n-1}:\overline{n-2}:\overline{n-3}:y^{m+1}a^{4}ly^{n-4}}{\overline{m+1}^{5}}$, & ſic in infinitum eo ordine, quem unuſquiſque facilè percipiet.

63 Addam demonſtrationem ſyntheticam hujus inventi, cum via analytica ſupra expoſita difficilior, & longa nimis videri poſſit. Demonſtrandum eſt igitùr integrale ex quantitate $y^{m}ly^{n}dy$ eſſe ſeriem infinitè productam ſuprà inventam; ponatur $z = ly$ & $\frac{ady}{y} = dz$, erit $y^{m}ly^{n}dy = y^{m}z^{n}dy$;

eſt autèm $y^{m}z^{n}dy = y^{m}z^{n}dy + \frac{n}{m+1}y^{m+1}z^{n-1}dz$

$- \frac{n}{m+1}y^{m}z^{n-1}ady - \frac{n:\overline{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}y^{m+1}z^{n-2}adz$

$+ \frac{n:\overline{n-1}}{\overline{m+1}^{2}}y^{m}z^{n-2}aady$ &c. in infinitum, quia ſic

omnes termini à primo deſtruuntur ab immediatè ſequentibus, qui ijdem ſunt cum illis proptèr $dz = \frac{ady}{y}$. Sic ſecundus terminus ſeriei, qui eſt

$\frac{n}{m+1}y^{m+1}z^{n-1}dz$ deſtruitur à tertio termino

$- \frac{n}{m+1}y^{m}z^{n-1}ady$ proptèr $dz = \frac{ady}{y}$, & eodem

mo-

modo quartus deſtruetur à quinto, ſextus à ſeptimo &c. ſuperſtite tantùm primo termino $y^m z^n dy$. Eſt autèm hęc ſeries infinita integrabilis, primus enìm terminus cum ſecundo ſimùl ſumpti integrabiles ſunt, tertius cum quarto, quintus cum ſexto, & ſic omnis terminus in loco impari, cum ſuo immediatè ſequente eſt integrabilis. Facta porrò hac integratione, reperietur integrale hujus ſeriei, ſivè quantitatis $y^m z^n dy$, quę illi æquivalet $\frac{y^{m+1} z^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} z^{n-1} a}{\overline{m+1}^2}$

$$+ \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} z^{n-2} aa}{\overline{m+1}^3} - \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1} z^{n-3} a^3}{\overline{m+1}^4} \&c.$$

in infinitum ubi ſi pro z ponas ly, invenies ut ſuprà integrale ex $y^m ly^n dy = \frac{y^{m+1} ly^n}{m+1} - \frac{n : y^{m+1} ly^{n-1} aa}{\overline{m+1}^2}$

$$+ \frac{n : \overline{n-1} : y^{m+1} ly^{n-2} aa}{\overline{m+1}^3} - \frac{n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1} ly^{n-3} a^3}{\overline{m+1}^4}$$

&c. quod ad demonſtrandum fuerat aſſumptum.

64 Hinc, ſi $n$ fuerit numerus integer poſitivus, patet quantitatem $y^m ly^n dy$ fore integrabilem per ſeriem finitam, hoc eſt ſeriem mòx expoſitam, licet in abſtracto conſiderata, ſivè pro quocumque $n$ ſit infinita, tamèn in his caſibus, cum $n$ eſt poſitivus integer numerus rationalis ad finitam reduci. Exempli loco ſit $n = 2$; vides in termino quarto ſeriei $\frac{- n : \overline{n-1} : \overline{n-2} : y^{m+1} ly^{n-3} a^3}{\overline{m+1}^4}$ adeſſe primò

coeficientem numerum $n-2$ ac pro indè (cum debeat terminus per $n-2$ multiplicari) terminum hunc evanescere; sed & evanescent omnes deincèps termini, quia omnes coeficientẽ habent $n-2$, undè series, ceteroquìn infinita, fit finita, cum $n=2$. Sic & si $n=3$, $n=4$ &c. quia in seriei progressu terminus aderit qui per $n-3$, $n-4$ &c. multiplicandus veniet, & deincèps omnes, post illum, qui proindè evanescent omnes, solis remanentibus ijs qui pręcedunt in Ordine seriei, quos quidèm numerò finitos esse oportet. Ponamus loco exempli $n=2$, $m$ verò $=1$ ità ut integranda, sit $y\,ly^2dy$. in serie pones 2 pro $n$, 1 pro $m$, & omnibus terminis seriei à tertio abiectis, fiet hoc integrale $\frac{yyly^2}{2} - \frac{yyaly}{2} + \frac{yyaa}{4}$ vel $\frac{2yyly^2 - 2ayyly + aayy}{4}$. Si $m=-1$, series hæc inutilis redditur, quia $m+1$ tùnc $=0$, quod terminos singulos seriei infinitos reddit: sed tùnc hac (nu.61.) serie non est opus cum alibì doceamur tales quantites $\frac{ly^n dy}{y}$ nullius seriei adminiculo integrare.

(nu. 58. & seq.) 65 Patet igitùr quænam ex curvis suprà descriptis spatium huius seriei ope quadrabile contineat. Cum enìm illarum curvarum ęquatio sit $\frac{ly^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{-m}}} = x$

$= x$, sivè $\frac{ly^r}{a^{r-1}} = x$ (ponendo $r$ pro $\frac{n}{m}$) erit spatij (quod ad axem in quo $y$ assumuntur adiacet) elementum $xdy = \frac{ly^r dy}{a^{r-1}}$ quæ quantitas per seriem finitam non est integrabilis nisi $r$ sit numerus integer positivus. Figuræ 12, 13, & 14 non possunt habere $r$ numerum integrum, cum ponant $\frac{n}{m}$ fractionem habentem denominatorem parem, & si denominator est par, (loquor de fractione prima) numerus non est integer. Figura 15. habet $r$ negativum, Figura 16. habet positivum sed unitate minorem, ergò non integrum. Figura quidem 17. in qua $\frac{n}{m}$ suę æquationis est factio numeratorem habens imparem, (Fig. 17) potest esse de genere earum curvarum, quę per finitam seriem quadrantur. Si enim denominator sit 1, erit $\frac{n}{m}$ seù $r$ numerus positivus integer, debet autèm esse par, ex vi Hypotesis, qua curva OPAMN descripta est. Ponamus $r = 2$, erit, posita $CD = y$, $DM = x$, æquatio $\frac{ly^2}{a} = x$ undè $xdy = \frac{ly^2 dy}{a}$. Series supra inventa numero præced. dat integrale ex $\frac{ly^2 dy}{a}$ $= \frac{yly^2 - 2ayly + 2aay}{a}$. Sed quærendum est an aliqua constans addenda sit, vel demenda, ad hoc ut hoc integrale exprimat valorem ſpatij ARMDA, aùt ASP &c.; ſæpè enim addendę ſunt quædam conſtantes integralibus inventis, ut quantitates quęſitę per illa exprimantur. Nùnc quęro an ad hoc ut integrale inventum $\frac{yly^2 - 2ayly + 2aay}{a}$ exprimat ſpatium ARMDA, aliqua debeat addi, vel demi conſtans. Spatium indeterminatum ARMDA evaneſcit ſivè fit $= 0$ quando $y = a$, & $ly = 0$; ſed tunc inventum integrale, non evaneſcit, ſed fit $= 2aa$, ergò ubique demenda eſt conſtans $2aa$, ut ſpatium ARMDA perfectè exprimatur per illud integrale, eritque hoc ſpatium nõ quidem ut traditum eſt $\frac{yly^2 - 2ayly + 2aay}{a}$ ſed $\frac{yly^2 - 2ayly + 2aay - 2a^3}{a}$. Eâdem dę cauſa ſpatium ASP &c. eſt quantitas $\frac{-yly^2 + 2ayly - 2aay + 2a^3}{a}$, quæ eſt eadem ac alia ſed mutatis ſignis, quia hìc aucta x, minuitur y, ac proindè differentiale ſpatij ASP &c, eſt $-xdy$ non $xdy$. Si quęras igitùr ſpatium quod aſymptoto CK, curva ASPO, & ordinata clauditur, pone $y = 0$, & invenies eſſe $= 2aa$, undè & ſi ſpatij hac curva clauſi quadratura generalis non detur algebraicè quia valorem talis ſpatij ingreditur quantitas $ly$, tamèn ſpatium quod aſymptoto, & curva continetur algebraicè quadratur, & eſt $2aa$. Sìc, ſi $r$ fuiſſet $= 4$, ſpatium CASPO &c. NC fuiſſet $24aa$, & univerſalitèr erit

ſem-

sempèr spatium illud (quotiès $r$ fuerit numerus positivus integer par) $=$ caa, posito c esse productum ex omnibus numeris ab unitate usq; ad $r$ inclusivè dispositis, quod nimis longum esset explicare, & cõsiderando seriẽ propositã satis clarum fiet. Figura deindè 18, non potest habere $\frac{n}{m}$ sivè $r$ positivum, Figura 19. non potest habere integrum cum debeat esse $\frac{n}{m}$ unitate minor. Figura tandèm 20. habere potest integrum, & positivum, & de curva POAMN quę in illa designatur potest idẽ proportionalitèr dici ac de Figura 17. dictum est, & spatia eius per propositam seriem quadrari, & inveniri algebraicè spatiũ asymptoto & curvis huius figuræ clausum. Nobis tandèm ad nos redendum est, nèc diutiùs extrà propositum nostrum licet divagari. (fig.20.)

*Exemplum II.*

66 DEscribenda sit Curva ICDH subtangentem BO habens $= \frac{y\sqrt{aa+yy}}{a}$, undè $dx = \frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$. Igitùr opus est Curvam describere AE, quæ habeat ordinatam ME $= \sqrt{yy+aa}$, spatioque CMEAC per a diviso ponere æqualem ordinatam MD. Curva autèm AE erit hyperbola ęquilatera centrum habens C, axem verò transversum CA $=$ a. (fig.21.)

67 Po-

67 Poterit hæc constructio tentari, & per logarithmicam, quam in exemplo superiore descripsimus; spatium enìm ACMEA est æquale spatio ANKE − PKE + CMP + ANC, quarè ad quadrandum spatium ACMEA ponemus rectangulum ex CN $= \sqrt{\frac{aa}{2}}$ in logarithmum CK, & deindè addemus spatium rectilineum CMP + CNA − PKE, summaque divisa per a dabit quæsitam ordinatam MD.

(nu.55.) 68 Si velimus hanc constructionem moliri per rectificationem curvæ algebraicæ hoc exequemur per regulam suprà traditam. Nàm quadratum quantitatis $\frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$ divisibile est in duo quadrata $dy^2$, & $\frac{yydy^2}{aa}$, quorum radices dy, & $\frac{ydy}{a}$ sunt integrabiles, & integralia sunt y, & $\frac{yy}{2a}$ quapropter describenda est curva CF, cujus abscissis CM sivè QF existentibus y, sint ordinatæ MF vel CQ $= \frac{yy}{2a}$, quę erit parabola cõmunis parametro 2CA, Axe CB, vertice C descripta. Igitùr assumptâ ordinatâ MD æquali curvæ CF, erit punctum D in optata curva. Et cum spatium ANKE sivè $\sqrt{\frac{aa}{2}}$:l CK additum quantitati ANC + PMC − EKP faciat

AC-

ACME, hoc est faciat rectangulum ex MD in a, sivè rectangulum ex CF in a erit curva CF; sivè MD

$$= \frac{ANC + PMC - EKP + \sqrt{\frac{aa}{2}} : l\ CK}{a}, \text{ vel algebr.}$$

$$= \frac{\frac{y\sqrt{yy+aa}}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \log. \frac{aa}{\sqrt{4yy+2aa-4y\sqrt{yy+aa}}}}{a}, \text{ vel}$$

$$\frac{\frac{y\sqrt{yy+aa}}{2} + \sqrt{\frac{aa}{2}} : \log. \sqrt{\frac{aa+yy}{2}} + \sqrt{\frac{yy}{2}}}{a},$$

sumptis logarithmis in logistica cujus NC sivè $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ sit subtangens; uno tandèm verbo, integrale ex $\frac{dy\sqrt{aa+yy}}{a}$ est $\frac{y\sqrt{yy+aa}}{2a}$ plus rectangulo ex $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ in logarithmum fractionis $\frac{aa}{\sqrt{4yy+2aa-4y\sqrt{yy+aa}}}$ diviso per a, vel in logarithmum quantitatis $\sqrt{\frac{aa+yy}{2}} + \sqrt{\frac{yy}{2}}$ (idem enìm est) sumptis logarithmis habentibus $\sqrt{\frac{aa}{2}}$ pro subtangente.

### *Exemplum III.*

69 Quotiescumque æquatio ad quam pervenerimus fuerit $dy = \frac{ax^{m-1}dx}{a^m + x^m}$ erit integran-

do

do $y = l\sqrt[m]{a^m + x^m}$ posita a subtangente. Sic si fuisset $dx = \frac{axxdx}{a^3 + x^3}$ integrando provenisset æquatio $y = l\sqrt[3]{a^3 + x^3}$. Posset primò intuitu videri aliquid implicans in hoc canone contineri quò $\frac{ax^{m-1}dx}{a^m + x^m}$ per logarithmicam integratur, cum tamèn hæc quantitas contineatur in canone universaliore quem suprà tradidimus. Ibi enim notavimus $x^{m-1}dx$
(nu.47.) $\sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$ esse in integrabilem, & cum hęc quãtitas, posito $c = a$, $n = -1$, $b = a$ proveniat $\frac{x^{m-1}dx}{a^m + x^m}$, est manifestum hanc in illa tanquam casum peculiarem contineri, ac proindè integrabilem èsse, & illam algebraicè, sicutì canon ipse universalis, algebraicè integrabilis est. Verùm cum integrale ex $x^{m-1}dx\sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}$ notetur ibì esse quantitas $\frac{n : c^{m+1} + bx^m \sqrt[n]{c^{m+1} + bx^m}}{\overline{n+1} : m : b}$, patet hoc integrale fieri infinitam quãtitatem quando $n = -1$, ac proindè tùnc ejus valorem determinari non posse, & sìc inutilem reddi hanc regulam, & hac alia nobis utendum esse, si valorem hujus integralis tùnc determinare velimus. Recurrendum igitùr est ad logarithmos & scribendum $l\sqrt[m]{a^m + x^m}$ pro integrali canonis $\frac{ax^{m-1}dx}{a^m + x^m}$ sumptis logarithmis in logistica

sub-

subtangentem a habente, addita insupèr, vel dempta arbitraria constante b, si libuerit. Si etiàm fuerit integranda $\frac{a^{n+2}x^{n-1}dx}{a^{2n}-x^{2n}}$, erit integrale rectangulum ex $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ ductum in logarithmum quantitatis $\frac{\overline{a^n+x^n}\sqrt{\frac{1}{2}aa}}{a^n-x^n}$ divisum per *n*, & sumptum in logistica cuius sit subtangens $\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ à puncto per quod ipsa subtangens est ordinata.

### *Exemplum IV.*

70 Sit æquatio construenda $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$; dividetur quadratum partis $\frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$ in duo quadrata $dx^2$, & $\frac{aadx^2+xxdx^2-2axdx^2}{2ax-xx}$, quorum radices dx, & $\frac{adx-xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$ sunt integrabiles habentq; integralia x, & $\sqrt{2ax-xx}$. Igitùr, descripta curva cuius abscissa existente x, sit ordinata $\sqrt{2ax-xx}$ (quæ circulus erit radio a) portio curvæ quæ ad quamvis abscissam x pertinet, erit quæsita y. Hac via faciliùs apparet connexio propositæ curvę cum cir-



cu-

culari quadratura, vel rectificatione, quàm si descripsissemus curvam cuius ordinata sit $\frac{aa}{\sqrt{2ax - xx}}$, ut docet regula huius sectionis. Similitèr si fuisset $dy = \frac{adx\sqrt{aa-xx}}{a}$, curva cuius hęc est ęquatio nos deduxisset ad circuli quadraturam, quia descripta curva cuius abscissa sit x, & ordinata $\sqrt{aa-xx}$ (quę est circulus radio a, sumptis abscissis à centro) spatium circulare cuivis abscissę correspondens per a divisum quęsitę curvę ordinatam suppeditasset Reducitur ad quadraturam circuli etiàm $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$ si sit integranda, quia eius quadratum $\frac{aadx^2}{aa-xx}$, dividitur in partes $dx^2$, & $\frac{xxdx^2}{aa-xx}$, quarum radices $dx$, & $-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}$ integratæ dant integralia $x$, & $\sqrt{aa-xx}$. Igitùr curva algebraica, abscissam x, & ordinatam habens $\sqrt{aa-xx}$ (quæ circulus est ad centrum tamquam initium abscissarum relatus) si rectificetur dabit integrale ex quantitate $\frac{adx}{\sqrt{aa-xx}}$.

71 Universaliùs $\frac{x^{n-1}dx\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{2n-2}}$ reducitur ad

circularem quadraturam. Descripto enim circulo radium $a$ habente, à centro extendatur per eius unam diametrum portio quæ sit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$, erit ordinata illi competens ex circuli natura $= \frac{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{n-1}}$, quæ si ducatur in datæ abscissę $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ differentiale dabit $\frac{n : x^{n-1}\,dx\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{2n-2}}$, cuius integrale est spatium correspondens circulare. Igitùr integrale quęsitũ ex $\frac{x^{n-1}\,dx\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}{a^{2n-2}}$, erit huius spatii pars $n^{esima}$.

72 Similitèr $\frac{ax^{n-1}\,dx}{\sqrt{2a^n x^n - x^{2n}}}$ habet pro integrali arcum circularem radio $a$ ductum, & abscissam habentem à vertice $= \frac{x^n}{a^{n-1}}$ sed tamen hunc arcum per $n$ divisum, ut facilè erit synthetica methodo experiri. Alios canones non absimiles excogitabis pro internoscendis quantitatibus quę inter integrandum occurrere possunt, vel quę in ęquationibus differentialibus posunt inveniri, & quarum integrale, sivè quæsitarum curvarum descriptio, à circuli quadratura dependet. Per has suprà allatas regulas

$\frac{xdx\sqrt{a^4-x^4}}{aa}$, $\frac{x^2dx\sqrt{a^6-x^6}}{a^4}$ haud aliter etiàm $\frac{xdx}{\sqrt{2a^2x^2-x^4}}$, $\frac{xxdx}{\sqrt{2a^3x^3-x^6}}$, & tales per circularia spatia integrantur, & infinitæ alię hujusmodi, eandem à circuli quadratura suscipiunt dependentiam.

73 Itèm $\frac{a^{n+2}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$ est integrabilis per circulum, est enim eius integrale sector per $n$ divisus, qui habeat sui dimidii tangentem ipsi $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ ęqualem; Si enim tangens dimidij arcus sit $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ erit sinus arcus totius $=\frac{2x^n a^{n+1}}{a^{2n}+x^{2n}}$, & eius abscisa erit $=\frac{2ax^n}{a^{2n}+x^{2n}}$, quorum si fiant differentialia, & differentialium quadrata, & quadratorum summa, & summę radix quadrata, erit illa elementum arcus, quod invenietur esse $=\frac{2na^{n+1}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$, quod elementum in $\frac{a}{2}$ ductum dat elementum sectoris circularis quęsitum $=\frac{na^{n+2}x^{n-1}dx}{a^{2n}+x^{2n}}$, undè propositum elementum quod est huius sub $n^{plum}$ erit elementum talis sectoris per $n$ divisi. Quarè iam quotiescumque integranda

sit

sit $\frac{xa^4\,dx}{a^4+x^4}$, vel $\frac{xxa^5\,dx}{a^6+x^6}$, & similia, res erit ad sectorem circuli radium a habentis, & cuius dimidii tangens sit $\frac{x^2}{a}$, vel $\frac{x^3}{aa}$, sed per 2, vel 3 respectivè divisũ. Sic $\frac{a^{\frac{5}{2}}\,dx}{\sqrt{aax+x^3+2axx}}$ est integrabilis per circulum, hic enim est casus propositi canonis ubi $n=\frac{1}{2}$.

*Exemplum V.*

74 PRo constructione curvæ BM secantis datam (*fig.4.*)
quamvis curvam MV circà fixum punctum in gyrum motam in angulo quovis dato, de qua alibi actum est, cum ibi invenerimus, quod posita (*nu.35.*)
$AG=x$, $BC=y$, $CD=r$, radio $CG=a$, sinu recto dati anguli in radio a, $=b$, & sinu complementi $=c$, habetur æquatio $dx=\frac{byady+crady}{cyy-byr}$, curva construi potest cuius abscissæ in axe recto $=y$, ordinatæ verò similitèr rectæ sint $\frac{aaby+aacr}{cyy-byr}$, datur enim $r$ per $y$, & a est constans, b verò & c, vel & ipsæ constantes, sunt (ut in casu quem hic ponimus, quo angulus cuius sunt sinus cõstans sit) vel & ipsę

dan-

dantur per y, ut ibì etiàm evenire poſſe notavimus. Hac curva deſcripta, ſpatijs quæ illa cum ſuis coordinatis comprehendit per a diviſis, ęquales eſſe debent abſciſſæ x curvæ quęſitę BM, ſivè arcus AG ęquales debent poni rectis illis, quę ſpatia hæc per a diviſa exæquaverint. Verùm & ſi deſcriberemus ad circulum AG tanquam axem lineam, aſſumendo arcus à puncto $A = y$, & ordinatas correſpondentes à centro uſque ad curvam $= a\sqrt{\frac{2bay + 2car}{cyy - byr}}$ poſſemus etiàm ſpatijs quæ intèr centrum, & talem curvam, duaſq; ordinatas quaſvis clauduntur per a diviſis ponere æqualem abſciſſam AG, cui ordinata correſpondeat $= y$, ſic enim punctum reperietur in optata curva BM, quia ſi adſit curva ad axem circularem AG, cuius abſciſſa in hoc axe exiſtente y, ordinata a centro ſit $a\sqrt{\frac{2bay + 2acr}{cyy - byr}}$, erit elementum ſpatij intèr hanc curvam, & centrum, per quàvis ordinatam à centro abſciſſi & per a diviſi $= \frac{by\,ady + crady}{cyy - byr} = dx$. igitùr x quæſitæ curvæ æqualis eſt huic ſpatio per a, ut ſuprà dictum eſt, diviſo. Addidimus hanc conſtructionē per quadraturā curvæ ad axem circularem relatę, quòd videatur naturæ problematis magis congrua, cum hìc de lineis agamus ad tales axes conſtitutis. Utraque tamèn harum conſtructionum pro legitima eſt reputanda.

SE-

# SECTIO QUARTA.

*De conſtructione æquationum differentialium primi gradus, quando conſtet non eſſe algebraicè integrabiles, & pretèr utriuſque indeterminatæ differentialia ad quamvis poteſtatem elevata, continent alterutram tantùm indeterminatarum.*

---

## PROPOSITIO PRIMA.

75 Æquatio differentialis primi gradus ad quam pervenitur pro quęſita aliqua linea eſt interdùm talis ut differentialia utriuſq; indeterminatæ ad poteſtatem quamvis elevata habeat unicam tantùm indeterminatam cæteroquìn continens; tùncque, ſi loco differētialis indeterminatę illius, quæ ęquationem non ingreditur, ſubſtituatur $\frac{zdt}{a}$, hoc eſt indeterminata quędam z per conſtantem diviſa, & in differentiale dt alterius indeterminatæ, quę æquationem inventam ingreditur multiplicata, habebimus æquationem alicuius curvæ, cuius ſpatia quæ ſunt ad abſciſſas t per a diviſa erunt ordinatis quæſitę Lineæ æqualia eaſdem abſciſſas t habentibus.

76

76 Nàm, poſito indeterminatam, quæ æquationem non ingreditur eſſe u, adeſſe autèm tantùm du, t verò ut ſuprà dictum eſt eſſe aliam, cuius non ſolum differentiale in ęquatione apparet, ſed & pretereà ipſa extrà differentiale ſignum in illa reperitur, cum loco du iſte valor $\frac{zdt}{a}$ ſit ubiq; ſubſtituendus, & loco $du^2$ ſubſtituendum ſit $\frac{zzdt^2}{a^2}$, & $\frac{z^3dt^3}{a^3}$ loco $du^3$, & ſic de cæteris ipſius du poteſtatibus, eſt clarum in unoquovis membro ęquationis poſt ſubſtitutionem tot ipſius dt dimenſiones eſſe adfuturas, quot priùs aderant differentialis du poteſtates, additis inſupèr dimenſionibus, quas in quovis termino eadem dt antè ſubſtitutionem habuerat. Et cum in quavis æquatione, du, & dt ſimùl ſumptæ æqualem in om-
(xu. 4.) ni membro dimenſionum numerum habeant, ſequetur quod in hac etiàm æquatione, ſubſtitutione peracta, dt ubique eandem dimenſionem obtinebit, undè diviſibilis erit æquatio per illam ipſius dt dimenſionem, & ſic omnia differentialia omninò tollentur ex æquatione, quę algebraica fiet, & relationem indeterminatarum t, z determinans curvam aliquam algebraicam indigitabit. Deſcripta porrò hac curva, cum debeat eſſe $du = \frac{zdt}{a}$, debebimus ſpatijs quæ illa claudit cum axe, & coordinatis (cum axe inquàm in quo t aſſumuntur) per a diviſis ęquales

les ponere lineas u, quæ erunt ordinatæ curvæ construendæ, ad abscissas t pertinentes. Est enim zdt hujus spatij, zdt verò eiusdem per a divisi elemētum, $\frac{zdt}{a}$ quod elementum du ordinatę u (quę ad abscissam t in quęsita curva pertinet ex Hypotesi) debet æquare, undè si elementa sunt continuò invicèm æqualia, æqualia erunt & integralia elementorum.

## *COROLL.*

77. zdt non solùm est elementum spatij quod claudit axis, ordinata z, & Curva cuius abscissa sit t, & z applicata, sed est etiàm elementum spatij illius constante quovis spatio aucti. Itaquè u, sivè quęsita ordinata non æqualis tantùm censenda est spatio quod superiùs determinavimus, & curvâ duabusque coordinatis circumscripsimus, per a diviso, sed addito etiàm quovis constanti spatio per a diviso, sivè quavis constante recta, erit adhùc ordinata quæsitę curvæ; additio hęc constantis curvam positione tantùm, non natura, variare potis est. Facilè per datum punctum duci poterit curva quæcumq; per hoc æquationum genus expressa, quod cum nullâ possit impediri difficultate, ulteriùs explicare negligimus.

*Exemplum.*

78 SI relatio intèr quatuor lineas tangentem, subtangentem, normalem, & subnormalem quęsitæ lineæ, sivè t, s, n, r, æquatione quavis exprimatur nullam constantem continente, ità ut in omni æquationis huius termino dimensiones literarum t, s, n, r simùl sumptæ eundem numerum efficiant, tùnc æquatio erit per unam eandemque ordinatæ y dimensionem divisibilis, evanescente sic omninò y ex æquatione; est enìm $t = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$,

(nu. 5.) $s = \frac{ydx}{dy}$, $n = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, $r = \frac{ydy}{dx}$, undè harum Linearum unaquævis per eandem ordinatæ y (primam nempè) potestatem afficitur, quarè si ex his quatuor Lineis ad quamcumque potestatem elevatis fiat quodcumque productum, tot erunt in producto dimensiones indeterminatæ y, quot fuerint omnes dimēsiones producti, ut in producto $t^3 s^5 n rr$ aderunt undecim dimensiones lineæ y, quia undecim dimensionum est productum; æquatio autèm, quæ ipsarum t, r &c. relationem continet, debet ubiquè eundem dimensionum numerum sortiri, & solis t, r &c. constare, quia nullam constantem admittere debet, quarè divisibilis erit per tantam ipsius y potestatem quantus erit hic dimensionum numerus, ut si æquatio foret $s^3 - t^3 = rrn - n^3$, æquatio di-

divisibilis esset per $y^3$, & sic de singulis. Per hanc porrò divisionem tolleтur omninò y ex æquatione, & solę dy, dx superstites erunt. Applicemus regulã, & ponamus quod $sr - rn = ts$, sivè $yydx^2dy^2$ sit $= \overline{yydx^3 + yydy^3} \sqrt{\overline{dx^2 + dy^2}}$; Iàm æquatio divisibilis est per yy, nec post divisionem reliquum est quidequam in æquatione pratèr dx, & dy, nàm æquatio à signis radicalibus liberata est $dx^8 + dx^6dy^2 + 2dx^5dy^3 - dx^4dy^4 + 2dx^3dy^5 + dy^6dx^2 + dy^8 = 0$ substituenda est iàm $\frac{zdy}{a}$ in lo- (nu. 75)
cum dx, undè æquatio $z^8 + z^6aa + 2z^5a^3 - z^4a^4 + 2z^3a^5 + zza^6 + a^8 = 0$ Patet autèm hanc ęquationẽ nõ esse ad lineam quamdã, sed ad punctũ, vel puncta numero finita, hoc est z est constans, non verò variabilis, quia ex hac æquatione patet z dari per constantem a. Cum igitùr z sit quædam constans, & sit $dx = \frac{zdy}{a}$ & proinde $dx, dy :: z, a$, erit dx ad dy in ratione constante; igitùr recta est linea quæsita, & talis ut cum axe angulum contineat, cuius sinus complementi ad sinum rectum sit ut a ad z radicem mox inventæ æquationis. Quarè patet quomodò sit instituenda constructio, & duci debeat quæsita linea.

## COROLL.

79 Similitèr quotiès æquatio inventa pro construenda linea solis dx, & dy constiterit, ostendetur lineam ipsam rectam fore, cum axe dato, atque ad punctum in illo datum vel assumptum angulum constituens, cuius sinus complementi ad sinum sit ut a recta quædam ad arbitrium assumpta ad z radicem ęquationis inventæ per substitutionem quantitatis $\frac{zdy}{a}$ loco dx. Quæ substitutio in his casibus breviùs supplebitur si pro dx ubique ponamus z, & pro dy ponamus a, cum z, & a ipsis dx, dy proportionales existant, vi hypothesis $dx = \frac{zdy}{a}$

### *Exemplum II.*

80 Curva ponatur construenda, cuius abscissę potestas quævis data, sit æqualis cuivis potestati ipsius curvæ, sivè cuius æquatio sit $t^m = \frac{x^n}{a^{n-m}}$, & proindè $t = \frac{x^{\frac{n}{m}}}{a^{\frac{n-m}{m}}}$ undè $dt = \frac{\frac{n}{m}\, x^{\frac{n-m}{m}}\, dx}{a^{\frac{n-m}{m}}}$, & pro dt ponendo $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ erit quadrando deindè & reducendo ęquationem ad eundem denominatorem $a^{\frac{2n-2m}{m}} dx^2 + a^{\frac{2n-2m}{m}} dy^2 = \frac{nn}{mm}\, x^{\frac{2n-2m}{m}} dx^2$. Sivè in hac ęqua-

æquatione ſubſtituamus $\frac{zdx}{a}$ loco dy iuxtà regulam traditam, ſivè ſeperando dy eius valorem eruamus $= dx \frac{\sqrt{\frac{nn}{mm} x^{\frac{2n-2m}{n}} - a^{\frac{2n-2m}{n}}}}{a^{\frac{2n-2m}{n}}}$, in idem recidet conſtructio, in quadraturam ſcilicèt ſpatii cuius æquatio ſit $z = a \frac{\sqrt{\frac{nn}{mm} x^{\frac{2n-2m}{n}} - a^{\frac{2n-2m}{n}}}}{a^{\frac{2n-2m}{n}}}$

Quando ſpatia hæc fuerint algebraicæ quadraturæ capacia tùnc curva quęſita erit & ipſa algebraica. ſecùs erit tantùm tranſcendens.

### *Exemplum III.*

81 PRoponatur deſcribenda ad axem AB curva CG, dato puncto fixo extrà axem D, talis ut ducta quavis tangente CE, & ordinata CB per punctum contactus, & per D ipſi CE parallela DF, ſit ubique $c AD^n AF^m, \overline{DF}^{m+n} :: \overline{DF}^r, \overline{BC}^r$, poſito c eſſe numerum quemvis datum conſtantem. Ponatur $AD = a$, $AB = x$, $BC = y$, invenienturque $AF = \frac{adx}{dy}$, & $DF = \frac{a\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, & debet eſſe analogia $\frac{c : a^{n+m} dx^m}{dy^m}, \frac{a^{n+m} : \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{m+n}{2}}}{dy^{n+m}} :: a^r$ (fig. 22)

$a^r : \dfrac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}}{dy^r}$, $y^r$; undè æquatio $cy^r\, dx^m dy^{n+r}$
$= a^r\, \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{m+n+r}{2}}$, undè quadrando invenietur
$c^2\, y^{2r}\, dx^{2m}\, dy^{2n+2r} = a^{2r}\, \overline{dx^2 + dy^2}^{m+n+r}$, & extracta radice cuius index ſit $m + n + r$ erit æquatio
$c^{\frac{2}{m+n+r}}\, y^{\frac{2r}{m+n+r}}\, dx^{\frac{2m}{m+n+r}}\, dy^{\frac{2n+2r}{m+n+r}} = a^{\frac{2r}{m+n+r}}\, dx^2 +$
$a^{\frac{2r}{m+n+r}}\, dy^2$. Ponamus iàm $\dfrac{zdy}{a}$ loco $dx$, & quævis poteſtas illius loco homologę poteſtatis huius, & peracta ſubſtitutione, & diviſo ubique per $dy^2$ & reducta æquatione ad eandem denominationem, fiet $c^{\frac{2}{m+n+r}}\, z^{\frac{2m}{m+n+r}}\, y^{\frac{2r}{m+n+r}} = a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz$;
undè $y^{\frac{2r}{m+n+r}} = \dfrac{a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz}{c^{\frac{2}{m+n+r}}\, z^{\frac{2m}{m+n+r}}}$, & tandèm, extracta radice indicem habente $\frac{2r}{m+n+r}$, erit $y$

$$= \frac{\overline{a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$$ æquatio curvę conſtruen-

ſtruendæ, qua conſtructa ſpatijs, quæ adiacent abſciſſis per a diviſis æquales ponantur rectè lineę, hę erunt ordinatę x pertinentes ad abſciſſas y in curva quęſita.

## COROLL.

82 MVltotiès evenit curvam hanc quadratricem quęſitę curvę (hoc eſt cuius ſpatiorum quadratura manifeſtat ordinatas curvæ quæſitæ) eſſe algebraicè quadrabilem, tuncque quæſita curva erit etiàm algebraica, quia quæſitę curvę ordinatæ ſunt ſpatijs huius, quam quadratricem voco proportionales. Ut autèm clariùs diſtinguamus quoſdam caſus in quibus curva hæc quadratrix eſt algebraicè quadrabilis vocemus $a^{\frac{2r+2m}{m+r+n}} = b$, & $a^{\frac{2n}{m+r+n}} = c$; eritque proindè æquatio curvæ quadratricis $y = \overline{b + czz}^{\frac{m+n+r}{2r}} : c^{\frac{2}{r}} z^{\frac{m}{r}}$. Quotieſcumque autèm integrabilis fuerit $dz : \overline{b + czz}^{\frac{m+n+r}{4r}} : c^{\frac{2}{r}} z^{\frac{m}{r}}$ ſivè $ydz$, erit & integrabilis $zdy$, quia $\int zdy + \int ydz = yz$, ac proin-

dè

dè $\int zdy = yz - \int ydz$. Cum autèm $\int \frac{zdy}{a}$ sit ordinata curvæ quæsitæ, sequetur hanc ordinatam fore algebraicam quotiès $dz : \dfrac{\overline{b + ezz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$ fuerit integrabilis.

83 Et primò quidèm, si numerus qui denotatur per $\frac{m+n+r}{2r}$ fuerit integer, & positivus, clarú est, quantitatem $b + ezz$ elevandam fore ad aliquam positivam integram potestatem, quæ quidèm (quęcumque sit illa) non posset non integrabilem efficere quantitatem $dz : \dfrac{\overline{b + ezz}^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$ nisi obstaret $z^{\frac{m}{r}}$ posita in denominatore. Nisi enìm adesset omninò z in denominatore satìs darum est quamvis integram positivamque quantitatis $b + ezz$ potestatem in dz ductam, integrabile quid effecturam, quia si debeat $b + ezz$ elevari exempli loco ad tertiam potestatem, habebit z in uno membro nullam, in alio duas, in tertio quatuor in alio demú sex dimensiones, quæ omnia igitùr membra in dz, ducta facient integrabiles quantitates. Et universaliùs, ad quamvis potestatem integram positivamque elevanda sit $b + ezz$, in uno semper membrorum nullam, in se-

secundo duas, in tertio quatuor, in quarto sex dimensiones est habitura, quòusque maxima ipsius z dimensio sit exponentis $\frac{m+n+r}{2r}$ dupla, vel sit $=\frac{m+n+r}{r}$, & nullibì ad potestatem imparem poterit elevari, sed omnis quidèm numerus par qui maior non sit quàm $\frac{m+n+r}{r}$ erit exponens literę z in aliquo membro. Verùm cum denominator ducatur in ipsius z potestatem $\frac{m}{r}$ debebit hæc potestas subtrahi, ex omni numeratoris membro, quod sanè integrabilitatem non potest tollere, nisi alicubì exponens potestatis reliquę ipsius z sit $=-1$. Ex quavis nempè potestate, quam habeat z in quocumque membro cuiusvis potestatis integræ, & positivæ $\frac{m+n+r}{2r}$ ad quam b+ezz elevetur, tollendo potestatem $\frac{m}{r}$, reliquum est alia ipsius z potestas, quæ proinde in dz ducta erit adhùc integrabilis ut priùs, dummodò hæc potestas nullibì sit $-1$, quo in casu integrabilem non esse alibì ostensum est. (nu.42.)
Si igitùr, existente semper $\frac{m+n+r}{2r}$ positivo, & integro, fuerit $\frac{m}{r}$ negativus (vel integer vel factus nihil inter est) debebit potestatibus quas habet z in nu-

meratore, non demi quidèm, sed addi aliquid positivum. Sed addendo aliquid cuivis numero positivo aùt etiàm addendo aliquid ad nihil, nunquàm potest provenire negativus numerus $-1$; quarè in hoc casu nunquàm poterimus incidere in membra non admittentia integrationem algebraicam. Pronunciemus igitùr quod quotiès, existente $\frac{m+n+r}{2r}$ positivo integro, $\frac{m}{r}$ simùl fuerit quomodocumquè negativus, curva quadratrix erit quadrabilis, & curva quæsita consequentèr algebraica. Exemplum esto $r=2$, $m=-2$, $n=4$, quo in casu si ponatur $c=1$ erit $b+ezz$ (restitutis pro $b$, & $e$ eorum valoribus) $=\frac{aa+zz}{aa}$, & applicando debitè valores exponentium $m, n, r$, erit æquatio curvæ quadratricis, positis $HI=z$, $IK=y$, $y=\frac{aaz+z^3}{aa}$. Undè $ydz=\frac{aazdz+z^3dz}{aa}$, & spatium HIK quod adiacet axi supèr quem assumuntur z erit integrando $\frac{2aazz+z^4}{4aa}$, quod cum evanescat evanescente, z nihil constans addi debet ad exprimendum spatium HIK. Cum autem opus habeamus spatii HLK, quod est $\int zdy$, inveniemus illud demendo ex $yz$, sivè ex quãtitate
(fig. 23.)

aa-

$\frac{aazz + z^4}{aa}$ mox inventum ſpatium HIK $\frac{2aazz + z^4}{4aa}$, & reliquum erit $\int zdy$, vel HKL $= \frac{2aazz + 3z^4}{4aa}$, undè $\int \frac{zdy}{\sqrt{a}}$ ſivè quæſita $x = \frac{2aazz + 3z^4}{4a^{\frac{3}{2}}}$. Curva igitùr quęſita eſt talis ut, eius abſciſſa exiſtente $y$ ſivè $\frac{aaz + z^3}{aa}$, ordinata $x$ ſit $\frac{2aazz + z^4}{4a^{\frac{3}{2}}}$.

84 Sed etiàm ſi $\frac{m}{r}$ ſit poſitivus, modò ſit fractus numerus, poterimus certiores eſſe curvam quęſitam algebraicam futuram in hypotheſi ſemper quod $\frac{m + n + r}{2r}$ ſit integer, & poſitivus; quia nempè numerus fractus ab integris demptus (quales ſunt omnes exponentes poteſtatum litteræ z in numeratore in hoc caſu, quo $\frac{m + n + r}{2r}$ eſt poſitivus integer) numqam integrum $- 1$ poteſt relinquere, loquor de fractis irreducibilibus. Undè ſi fuerit $m = 1$, $n = 1$, $r = 2$, erit, poſito $c = 1$, æquatio quadratricis LMK, poſitis $HO = z$, $OL = y$, (fig. 24.) $y = \frac{aa + zz}{\sqrt{az}}$, undè $ydz = \frac{aadz + zzdz}{\sqrt{az}}$ ſivè etiàm $= \frac{aaz^{-\frac{1}{2}}dz + z^{\frac{3}{2}}dz}{\sqrt{a}}$, undè integrando erit $\int ydz$

$= \frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$ æquale ſpatio ordinatâ quavis OL, ſuâ abſciſsâ OH, curvâ, & aſymptoto HR circumſcripto, quod cum evaneſcat evaneſcende z prorsùs ut debet, ſignum eſt, huic integrali $\frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$ nullam conſtantem eſſe addendam ut exprimatur ſpatium illud. Habito ſpatio ad axem OH, ad obtinenda ſpatia ad alium axem, quæ ſunt horum complementa, & quorum indigemus, aſſumatur $HP = \sqrt{\frac{a^2}{3}}$, ductaq; ordinata PM, quę erit $\frac{4a}{\sqrt{\sqrt{27}}}$ eritque omnium ordinatarum minima, invenietur ſpatium abſciſsâ PH, ordinatâ PM, curvâ, & aſymptoto HR clauſum $= \frac{32}{5} aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ rectangulum autem MNHP erit $4aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, ergò eorum differentia, ſpatium infinitè longum quod ordinatâ MN, curvâ, & aſymptoto NR definitur erit $\frac{12}{5} aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$. Si igitùr z eſt major quàm $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ dempto ſpatio infinitè longo RNMKR, quod eſt $\frac{12}{5} aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ ex indeterminato ſpatio RHOLMKR quod eſt $\frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$, reliquum erit ſpatium

NHOLMN, quod eſt igitùr $= \frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}} - \frac{12}{5}a^2 \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, quod ſpatium demptum ex yz rectangulo QLOH, quod eſt $\frac{aaz + z^3}{\sqrt{az}}$ reliquum facit quæſitum ſpatium NMLQ $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5\sqrt{az}} + \frac{12}{5}aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, quod per a diviſum dabit, in caſu, quo z major ſit quàm $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, quæſitam ordinatam curvæ, quam quærebamus $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}} + \frac{12}{5}a \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$. Eodem prorsùs modo ſi z ſit minor quam $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ ut HS, ex ſpatio infinitè lõgo RHSKR, quod eſt etiàm hìc $\frac{10aaz + 2z^3}{5\sqrt{az}}$ opus eſt demere rectangulum yz ſivè QHSK ſivè $\frac{aaz + z^3}{\sqrt{az}}$, & reliquum erit ſpatium infinitæ longitudinis RQKR $= \frac{5aaz - 3z^3}{5\sqrt{az}}$, & tùnc, dempto hoc ſpatio ex ſpatio conſtante infinitè longo RNMKR, quod ex viſis eſt $\frac{12}{5}aa \sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, erit reliquum quęſitum ſpatium

QN-

QNMK $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5\sqrt{az}} + \frac{12}{5}aa\sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$, quo diviso per a, erit ordinata quęſitæ curvæ etiàm cum fuerit z minor quam $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, æqualis $\frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}} + \frac{12}{5}a\sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$. Cum verò omni y duplex competat z, una major, altera minor quàm $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ (modò non ſit y minor quàm PM ſive quàm $4a\sqrt{\sqrt{\frac{1}{27}}}$, ſecùs nulla realis z illi competere poteſt) hinc eſt quod, aſſumpta ad libitum y ſivè HQ abſciſſa quęſitæ curvæ, duplex in ipſa quęſita curva illi competet ordinata, altera quidèm $= \frac{3z^3 - 5aaz}{5a\sqrt{az}} + \frac{12}{5}a\sqrt{\sqrt{\frac{1}{243}}}$ (poſita QL pro z) altera porrò erit ejuſdem valoris, ſed poſita KQ pro z.

85 Adſunt etiàm caſus quibus, exiſtente $\frac{m+n+r}{2r}$ integro poſitivo, & ſimùl $\frac{m}{r}$ poſitivo, & integro, adhùc curva quadratrix quęſitę lineę algebraicè poteſt eſſe quadrabilis. Si enim $\frac{m}{r}$ ſit poſitivus integer

ſed

ſed par, erit illa quadrabilis, quia cum in poteſtate $\frac{m+n+r}{2r}$ integra, & poſitiva quantitatis $b+ezz$ non poſſit, ex prænotatis z habere niſi pares dimēſionum numeros, ſi ex ſingulis harum dimenſionum exponentibus paribus, par numerus $\frac{m}{r}$ demi debeat, nunquam poterit remanere impar $-1$ pro exponente reliquæ poteſtatis ipſius z. Itaquè exiſtente $r=1$, $n=1$, $m=2$, & $c=1$, curva quadratrix quęſitę lineę, quę per ęquationē $y=\frac{a^4+2aazz+z^4}{azz}$, & per KML repręſentatur erit algebraicè quadrabilis. Integrale enìm ex $\frac{a^4 dz+2aazzdz+z^4 dz}{azz}$ (fig. 25)

ſivè $\int ydz$ eſt $=\frac{6aazz+z^4-3a^4}{3az}$, quæ quidèm quantitas, cum fiat infinitæ magnitudinis in caſu quo $z=0$, ſequetur infinitam magnitudinem conſtantem addendam eſſe huic integrali, ut habeatur ſpatium, quod aſymptoto HR, axe, ordinata quavis LO, & curva clauditur. Satiùs igitùr erit pro $\int ydz$ non ſpatia infinitè longa RHOLMK &c. interpretari, ſed alia ſpatia, quæ ordinatis, axe, curvâ, & ordinatâ conſtante quavis terminantur, ut LOPM, aſſumpta PM pro ordinata conſtantę, quæ (brevitatis gratia) ſit omnium minima, cujus quidèm

dèm abſciſſa HP in hac curva eſt $= a$, & ipſa ordinata eſt $= 4a$. Poſito igitùr $\int ydz$ ſpazia OLMP deſignare, debebit ab integrali $\frac{6aazz + z^4 - 3a^4}{3az}$ tolli $\frac{4aa}{3}$ ad hoc ut z exiſtente $= a$ evaneſcat illud, ut debet reverà evaneſcere. Sicque dicemus eſſe $\int ydz = \text{LOMP} \frac{6aazz + z^4 - 3a^4 - 4a^3z}{3az}$. Sed rectangulum PMNH eſt $= 4aa$, quod additum ad mox inventum ſpatium faciet aream NHOLMN $= \frac{6aazz + z^4 - 3a^4 + 8a^3z}{3az}$, qua dempta ex rectangulo QLOH quod eſt $\frac{a^4 + 2aazz + z^4}{az}$, reliquum eſt quçſitum ſpatium MNQLM $= \frac{6a^4 + 2z^4 - 8a^3z}{3az}$, quo per a diviſo, erit quotiens $x = \frac{6a^4 + 2z^4 - 8a^3z}{3aaz}$, & cum duplex z hìc quoque competat unicuivis y, duplex erit etiàm ipſius x valor mox inventus.

86 Sed etiàm ſi exiſtente $\frac{n + m + r}{2r}$ numero integro, & poſitivo, ſit $\frac{m}{r}$ numerus poſitivus integer impar, modò ſit major quàm $\frac{n + m + 2r}{r}$, ſemper cur-

curva quadratrix claudet spatia algebraicè quadrabilia, ac proindè quęsita curva erit algebraica; quia enim in potestate integra, & positiva $\frac{n+m+r}{2r}$ quantitatis $b+ezz$, indeterminata $z$ nullam potestatem habere potest majorem quàm $\frac{n+m+r}{r}$, immò omnis exponens indeterminatæ $z$ in quovis membro hujus potestatis, nisi sit $\frac{n+m+r}{r}$, erit saltèm binario minor quàm $\frac{m+n+r}{r}$; hinc si ab uno quovis horum exponetium debeat subtrahi $\frac{m}{r}$ major quàm $\frac{m+n+r}{r}$ (utpotè major quàm $\frac{m+n+2r}{r}$) reliquum erit quidèm semper quid negativum, sed nunquàm erit $-1$, excepto solùm casu quo $\frac{m}{r}$ esset unitate tantùm major quàm $\frac{n+m+r}{r}$ hoc est esset $\frac{n+m+2r}{r}$, tùnc enim hic exponens demptus à maximo exponente $\frac{n+m+r}{r}$ relinqueret $-1$. Vndè si $\frac{m}{r}$ sit etiàm major quàm $\frac{n+m+2r}{r}$ nunquàm poterit haberi $-1$ pro exponente indeterminatæ $z$

in ullo terminorum, etiàm si $m$ sit numerus impar.

Esto exemplum $m = 7$, $n = -4$, & $r = 1$, c verò $= 1$, quo in casu ęquatio curvæ quadratricis invenietur $\frac{a^8 + a^4 z^4 + 2a^6 zz}{z^7}$, quæ repræsentatur per MK, positis (fig. 26.) $HS = z$, $SK = y$; spatium $\int ydz$, quod asymptotus HN, curva, axis, & quævis ordinata claudunt est $\frac{-a^8 - 3a^6 zz - 3a^4 z^4}{6z^6}$, undè infinitum est si $z = 0$.

Ducamus igitùr ordinatam quamvis MP, sitq; brevitatis gratia ordinata MP, quæ pertinet ad abscissā $PH = a$, ità ut $PM = 4a$. Sumanturque ab ordinata PM deincèps spatia, quę per $\int ydz$ denotantur. Si ergò velimus, quod, z existente a, sint hæc spatia $= 0$, debebit addi constans $\frac{7}{6}aa$, & erunt $\int ydz$, spatia PSKM $= \frac{7aaz^6 - a^8 - 3a^6 zz - 3a^4 z^4}{6z^6}$. Undè facilè innotescit, spatium quod curvâ, asymptoto HN, coordinatisque MP, PH est clausum, esse infinitum, cum quantitas mòx inventa, quæ spatiorum mensuram exhibet fiat infinita cum z est $= 0$, spatium verò asymptoto altera PL, curvâ, & ordinatâ PM circumscriptum, esse $= \frac{7}{6}aa$, quia, posita z infinita, omnes termini $a^8$, $3a^6 zz$, $3a^4 z^4$ evanescunt, cum re-

reliquo $7aaz^6$ sint infinitè minores, sicque superest solus $\frac{7aaz^6}{6z^6}$, sivè $\frac{7aa}{6}$ pro spatii huius mensura. Invento igitùr spatio MPSK, dematur hoc ex spatio infinitè longo MPLM, quod ex visis est $= \frac{7}{6}$ aa, & reliquum erit spatium infinitè longum KSLK $= \frac{a^8 + 3a^6zz + 3a^4z^4}{6z^6}$, quod additum ad yz rectangulum HSKQ quod est $= \frac{a^8 + 2a^6zz + z^4a^4}{z^6}$, summam facit spatium infinitè longum HQKLH $= \frac{7a^8 + 15a^6zz + 9a^4z^4}{6z^6}$, $\int$ zdy; quarè ordinata demùm curvæ quęsitę x est $= \frac{7a^7 + 15a^5zz + 9a^3z^4}{6z^6}$, existente $y = \frac{a^8 + 2a^6zz + a^4z^4}{z^7}$.

87 Quotiès tandèm, existente $\frac{m + n + r}{2r}$ positivo, & integro, fuerit $\frac{m}{r}$ integer positivus impar, sed non major quàm $\frac{m + n + 2r}{r}$, curva quadratrix non erit algebraicè quadrabilis, sed tantùm opè Logarithmicæ. Quoniàm enim $\frac{m}{r}$ est numerus impar, assumatur par proximè minor, qui

 uni-

unitate tantùm differet à numero $\frac{m}{r}$, hic erit necessariò exponens literæ z in aliquo termino numeratoris, quia cum $\frac{m}{r}$ non sit maior ex Hypotesi quam $\frac{m+n+2r}{r}$, neque $\frac{m}{r}-1$ (numerus par proximè minor impare $\frac{m}{r}$) erit ideò maior quàm $\frac{m+n+2r}{r}-1$ sivè $\frac{m+n+r}{r}$; sed omnis numerus par non maior quàm $\frac{m+n+r}{r}$ est exponens literæ z in aliquo termino quantitatis $b+ezz$ quæ elevatur ad integram positivamque potestatem $\frac{m+n+r}{2r}$, igitùr erit necessarium inveniri in numeratore aliquem terminũ, in quo exponens literę z sit $\frac{m}{r}-1$, ex quo demendo posteà $\frac{m}{r}$ exponentem literę z in numeratore, reliquum erit $-1$ exponens literæ z, undè ad Hyperbolæ quadraturam erimus deducti; res erit clarior exemplis; ponamus $n=2$, $m=1$, $r=1$, c verò $=4$, tùnc ęquatio ad curvam, quam nùnc vocamus quadratricem erit $y=$
(fig. 57.) $\frac{a^4+z^4+2aazz}{4aaz}$, quam designat LMK habentem abscissas z in axe HO, & ordinatas y in axe HR; ad quadranda porrò spatia huius curvę, sivè ad in-

te-

tegrandam quantitatem $\frac{a^4dz + 2aazzdz + z^4dz}{4aaz}$, si dividamus illam in partes $\frac{aadz}{4z} + \frac{zdz}{2} + \frac{z^3dz}{4aa}$, inveniemus integrale $\frac{zz}{4} + \frac{z^4}{16aa} + \frac{alz}{4}$, sumptis logarithmis in logarithmica habente a pro subtangente, à quocumque posteà puncto eius asymptoti incipiant. Verùm posito $z = o$ spatium hoc infinitum est, quia tunc lz est infinita, ut igitùr in quantitatibus assignabilibus versemur, assumemus spatia $\int ydz$ ab ordinata minima MP, quę ad abscissam PH spectat æqualem $\sqrt{\frac{aa}{3}}$? estque ipsa $MP = \frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$. Substituto igitùr $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ pro z in valore spatii mox invento, erit tùnc spatium $RHPMKR = \frac{aa}{144} + \frac{aa}{12} + \frac{a\, l\sqrt{\frac{aa}{3}}}{4}$, quod quidèm ut fiat $= o$, poterimus facere $l\sqrt{\frac{aa}{3}} = o$, sivè sumere logarithmos in logistica cujus a sit subtangens, à puncto per quod ordinatur linea $\sqrt{\frac{aa}{3}}$, & deindè debemus insupèr demere constantem $\frac{13aa}{144}$, sicque spatium quod interjacet ordinatâ constantem MP omnium minimam, curvam LM, ordinatam quamvis LO, & axem erit $= \frac{z^4}{16aa} + \frac{zz}{4} - \frac{13aa}{144} + \frac{alz}{4}$, sumptis logarithmis in logarithmica habente parametrum a, à puncto per quod ordinata est $\sqrt{\frac{aa}{3}}$. Quo spatio invento, si addamus illi constans rectangulum ex PH $\sqrt{\frac{aa}{3}}$ in MP $\frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$ quod est $\frac{4}{9}$ aa fiet indeterminatum spatium NHOLMN $= \frac{9z^4 + 36aazz + 36a^3lz + 51a^4}{144aa}$, quo dempto ex rectangulo QHOL quod est yz seù $\frac{a^4 + 2aazz + z^4}{4aa}$ reliquum est $\int zdy$ spatium NMLQ $= \frac{zz}{4} + \frac{3z^4}{16aa} - \frac{alz}{4} - \frac{5aa}{48}$, quod divisum per a, dat x ordinatam quęsitę curvę $= \frac{zz}{4a} + \frac{3z^4}{16a^3} - \frac{lz}{4} - \frac{5a}{48}$. Cumque, assumpta ad arbitrium y (modo sit major quàm $\frac{4aa}{9\sqrt{\frac{aa}{3}}}$, secùs enìm omnis z foret imaginaria) duplex habeatur z, QL, & QK, duplex erit valor ordinatæ quæsitæ curvæ cuivis abscissæ y debitus. Hæc curva per hanc quadraturam sic constructa est illa quam vocant minimæ resistentiæ, ro-

rotata enìm circà axem in quo ipsæ x assumuntur solidum gignit, quod minimè omnium ejusdem longitudinis, & latitudinis resistentiam patitur à fluido in quo per sui axis directionem moveatur, quod tamèn hoc loco ostendere nostrum non est.

Ne autèm digressio hæc, quę jàm modum excessisse videri poterit, ulteriùs producatur, alios casus quibus quadratrix algebraicè quadrari possit, aut nequeat distinguere negligimus quod etiàm factu difficile, ac vix quidèm possibile arbitror, si regulam unicam generalem requiramus satis ostendentem quando nàm quantitas $dz : \dfrac{\left(a^{\frac{2r+2m}{m+n+r}} + a^{\frac{-2n}{m+n+r}}\, zz\right)^{\frac{m+n+r}{2r}}}{c^{\frac{1}{r}}\, z^{\frac{m}{r}}}$ sit algebraicè quadrabilis, quò semper reducitur quadratura curvæ quadratricis, sivè inventio ordinatæ quæsitæ.

### *Exemplum IV.*

Qvando describenda sit curva, cujus subtangentis data quævis potestas *m*, addita datæ potestati subnormalis *n*, datam potestatem *r* logarithmi ordinatę semper efficere debeat, æquatio erit $\frac{y^m dx^m}{dy^m} + \frac{y^n dy^n}{dx^n} = ly^r$, qua proptèr $y^m\, dx^{m+n} +$

y

$y^n dy^{n+m} = ly^r dy^m dx^n$, ubi unitas ſubintelligitur implere dimenſiones quæ deſunt, ſi alicubi deſint: pono nùnc $dx = zdy$ (ſubintellige unitatem, quæ dividat $zdy$) & erit ęquatio curvę quadratricis $y^m z^{n+m} + y^n = ly^r z^n$. Conſtructa igitùr curva in qua coordinatę ſint $z$, & $y$, quæque ſalvet hanc æquationem, ſi ſpatijs ad axem in quo ordinatæ $y$ aſſumuntur diviſis per conſtantem 1 ponantur æquales lineæ rectæ, illæ erunt ordinatæ pro curva quæſita ſpectantes ad abſciſsas $y$.

## COROLL.

Quotiès $m = 1$, $n = 0$, & $r$ fuerit numerus quilibet, quadratura curvæ quadratricis dependet tantùm à logarithmis, æquatio enìm erit (poſito ex. gratia $r = 3$) $yz + 1 = ly^3$ & ſupplendo per literam a dimenſiones quę deſunt, ut omnes termini æquales habeant dimenſiones, ſivè vocando a quam vocavimus 1, erit æquatio $ayz + a^3 = ly^3$, undè $z = \frac{ly^3 - a^3}{ay}$; ergò $zdy = \frac{ly^3 dy}{ay}$
(nu.61.) $- \frac{aady}{y}$. Terminus autèm $\frac{ly^3 dy}{ay}$ eſt integrabilis, &
(nu.27.) eſt integrale $\frac{ly^4}{4aa}$, integrale etiàm ex $- \frac{aady}{y}$ eſt $-aly$ in Logiſtica cuius parameter ſit a; ergò ſpatium $\int zdy$

erit

erit $\frac{ly^4 - 4a^3 ly}{4aa}$, & ordinata quæsita $= \frac{ly^4 - 4a^3 ly}{4a^3} = x$ æquatio quæsitæ curvæ. Dantur & alij casus, quibus per solam logarithmicam quadratur curva quadratrix, quos singulos prosequi nec est animus, nec fortè possibile foret.

# SECTIO QUINTA.

*De constructione æquationum differentialium primi gradus, quas constet non esse algebraicè integrabiles, & cum ambæ indeterminatæ illas ingrediantur, sunt tamèn cum suis differentialibus ab invicèm separabiles.*

## PROPOSITIO PRIMA.

88 UT plurimùm tamèn, æquatio differentialis ad quam pervenitur pro quæsita linea, talis est ut utraq; indeterminatarum illam ingrediatur cum suis differentialibus, & hoc quidèm casu, si indeterminatæ cum suis differentialibus ab invicèm sint separabiles, construetur æquatio per mòx afferendam regulam. Esse autèm separabiles ab invicèm indeterminatas cum suis differentialibus hoc tantùm importat, quod æquatio sit ad talē formam (ope consuetarum operationem Antithesis, multiplicationis, divisionisve legitimè adhibitarum) reducibilis, ut ab una parte, sola indeterminatarum alterutra u, cum du, & constantibus reperiatur, & simùl ab altera parte sola adsit reliqua indeterminata t cum sua dt, & constan-

ti-

tibus. Sicque omnis æquatio differentialis primi gradus, in qua hæc indeterminatarũ cum ſuis differentialibus ſeparatio facta ſit, reducetur ad hanc formam qdt = pdu, vbì duæ indeterminatę ſunt t, & u, & q eſt quantitas quomodocumque data per t, & conſtantes, p verò data per u & conſtantes.

89 Methodus igitùr pro conſtruenda æquatione generali ſivè canonica qdt = qdu talis eſto. Fiat curva cuius ordinata ſic detur per abſciſſam, ut p datur per u, quam vocabimus primam. Deindè fiat alia curva quam dicemus ſecundam, cuius ordinatę per ſuas abſciſſas talitèr dentur, qualitèr q datur per t. Debet porrò hic unitas ſubintelligi, quæ quantitates p, & q unius dimenſionis eſſe faciat per multiplicationem, aut diviſionem. Tùm deſcribatur tertia quædam curva quam quadratricem primam appellare poſſumus, cuius abſciſſæ ſint eædem ac abſciſſæ primæ curvæ, ordinatę vero ſint ſpatijs, quæ prima curva continet proportionales, ſivè ſint æquales ſpatijs, quæ axe, curva, & coordinatis primæ curvæ clauduntur diviſis per conſtantem illam, quam vocavimus unitatem. Haùd abſimili modo debet conſtrui quarta curva, quę eſt quadratrix ſecunda, & eius quidèm abſciſſę abſciſſis ſecundæ æqualibus poſitis, ordinatæ erunt ęquales correſpondentibus ſpatijs ſecundæ, diviſis per vnitatem. Quibus quatuor curvis prędeſcriptis ad deſcriptionem quæſitæ poterimus deſcendere. Aſſumpta enim in quadratrice

prima abſciſſa arbitraria u, transferatur eius ordinata in axem coniugatum lineę quadratricis ſecundæ, & ei competens abſciſſa in eadem quadratrice ſecunda erit ordinata quæſitæ lineæ quam abſciſſæ u debemus. Ut exempli gratia deſcripta curva prima AB ad axem AC tali, ut ordinata eius CB ſic (fig.28.) detur per abſciſſam AC ut p datur per u, eſtò curva AD quadratrix prima talis, ut ordinatæ eius CD, ad eaſdem abſciſſas AC attinentes, ſint æquales ſpatijs ACB per conſtantem 1 diviſis. Deindè deſcripta alia curva ſecunda EF ad axem EG, axemque coniugatum EI, cuius ordinatæ GF ſic dentur per abſciſſas EG, ut q datur per t, ponatur quadratrix ſecunda EK, habens ordinatas KG, ad eaſdem abſciſſas EG ſpectantes æquales ſpatijs EGF diviſis per conſtantem 1. Tandèm aſſumpta adlibitum abſciſſa AC ſivè LM in curva prima, aùt in quadratrice prima eius ordinata DC transferatur in EI axem coniugatum quadratricis ſecundę, & ducta ordinata HI huic fiat æqualis NM, eritque N in optata curva.

90 Cum enim CB ſic detur per AC ut p datur per u, aùt (quod idem eſt) AC, ſic ingrediatur compoſitionem ipſius CB ut u ingreditur compoſitionem ipſius p, ſequetur quod ſi AC ſit $= u$, erit CB $= p$, & proindè DC $= \int pdu$. Eodem modo cum GF ſic detur per GE ut q datur per t, aut EG ſic componat GF, ut t componit q, ſi fuerit EG $= t$, erit GF

$= q$,

$=q$, & proindè $KG = \int qdt$, & si viceversa fuerit $GF = q$, erit $EG = t$, aùt etiàm si fuerit $KG = \int qdt$, erit $GE = t$, vel si fuerit HO, aut $IE = \int qdt$, erit EO aut $IH = t$. Assumpta igitùr arbitraria $AC = LM = u$, erit $DC = \int pdu, = IE$, sed est $\int pdu = \int qdt$, erit ergò $IE = \int qdt$, igitùr $IH = NM = t$. Curva igitùr LN sic descripta, habet coordinatas t, & u verificantes æquationem $qdt = pdu$.

### *COROLL.*

91 SOlita constantium additio, aut detractio potest & hìc adhiberi, ut si curva quadratrix prima, non haberet ordinatas proportionales spatijs ACB, sed æquales illis spatijs constante spatio auctis, quod lineam quadratricem AD cæteroquìn invariatam promoveret tantum in OP, remanentibus tamèn adhùc ordinatis $CP = \int pdu$. Similitèr, & si secunda quadratrix EK, non ampliùs ordinatas KG spatijs EGF, sed illis spatijs constante spatio auctis proportionales haberet, quod lineam EK transferret aliorsùm ut in QR, remanentibus tamèn $GR = \int qdt$. Quæ nihilominùs curvarum licet positio-

nis

nis tantùm varietates, curvam quæsitam insignitèr possent mutare, salva adhùc æquatione differentiali qdt = pdu. Igitùr per datum punctum N, dato etiàm vertice L ad datum axem LM poterit duci curva ad datum ęquationem pdu = qdt convenientèr. Ducta enìm normali NM assumatur ei æqualis lH ordinata in quadratrice secunda, deindè assumpta AC = LM, siquidèm spatium ACB per datam constantem divisum ęquetur lineæ IE, nulla constantis additione opus erit, & curva descripta adamussim per methodum traditam, transitura est per N. Sèd nisi hoc spatium ACB divisum per datam illam constantem sit ęquale inventę IE, multiplicetur IE per illam constantem datam quæ est unitas, spatiumque IEI dematur ex spatio ACB, & reliquum erit constans illud spatium, quod spatiis indeterminatis AGB vbiquè addèndum, vel demendum venit pro describenda quadratrice prima AD, quâ deindè vti debemus ad quæsitę LN descriptionem, & qua porrò si utamur, linea quam ducemus certò certiùs per N est transitura.

*Exemplum.*

(fig.29.) 92 DAta quavis curva FC ad axem AB, debeat ad eundem axem describi ED, talis, ut si ducatur quævis ordinata BD, & producatur ad curvam datam in C, sit subtangens puncti D in cur-

curva ED æqualis ordinatæ CB in data curva. AB vocetur x, BD = y, CB verò = q. Patet igitùr quod q dabitur per x, proptèr datam curvam FC, sivè proptèr datam ejus æquationem, quæ exprimet quomodo CB dependeat ab AB. Quaproptèr ęquatio $\frac{ydx}{dy} = q$ sive $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{y}$, ad quam pervenietur est ex illis in quibus indeterminatæ cum suis differentialibus ab invicèm sunt separabiles. Multiplicemus per aa, & erit $\frac{aadx}{q} = \frac{aady}{y}$. Iàm ergò curva est construenda cujus ordinata detur per suam abscissam ut $\frac{aa}{y}$, datur per y, sivè cujus ęquatio sit $z = \frac{aa}{y}$, quę est hyperbola. Altera curva erit illa, cujus æquatio sit $z = \frac{aa}{q}$, sivè cujus ordinata z sic detùr per suam abscissam, ut $\frac{aa}{q}$ datur per x, aùt breviùs, cujus ordinatæ sint ipsis q ordinatis datæ curvæ reciprocè proportionales. Harum curvarum ope, & ope suarum quadratricum, ut jàm dictum est quæsita curva DE poterit describi. Sed est diligentèr advertendum, quod cum spatia, quę hyperbolem intèr & asymptotum jacent sint infinitę omninò magnitudinis, hinc quadratrix prima esset linea cujus omnis ordinata infinitæ foret longitudinis, nec proindè esset linea assignabilis, & quam possemus describe-

bere, aut adhibere. Hinc quadratrix prima talitèr erit ducenda ut ejus ordinatæ, non ſpatijs totalibus hyperbolicis ſint proportionales, ſed ſpatijs, conſtante quadam ordinata terminatis, quam arbitra-
(fig.11.) rium eſt ſeligere. Ut ſi HE concipiatur eſſe hyperbola deſcripta juxtà ęquationē $z = \frac{aa}{y}$, cujus quadratrix ſit ducenda, jam non opus eſt totalibus ſpatijs CKIHFEDC per conſtantem datam a diviſis, æquales ponere ordinatas quęſitę quadratricis (quod quidèm in praxi impoſsibile eſſet, ob infinitam horum ſpatiorum magnitudinem) ſed cum conſtans ſpatium poſſimus his ſpatijs addere, aut demere, ducamus ordinatam ad arbitrium AF (ſitque brevitatis ergo AF = AC) & ponamus quadratricis ordinatas æquales ſpatijs AFED, aùt AFLM per conſtantem a diviſis; ſic enìm idem efficimus ac ſi totalia ſpatia aſſumeremus ſed mulctata conſtante infinito ſpatio CKIHFAC, quod fieri poſſe prænotavimus. Quod ſi fiat, quadratrix AB ſic deſcripta erit logarithmica ut aliàs obſervavimus, ejuſque ſub-
(nu.56.) tangens AC = a. Patet igitùr quomodo quęſita curva $\frac{dx}{q} = \frac{dy}{y}$ conſtruatur, & ſimùl logarithmos ejus ordinatarum eſſe proportionales ſpatiis eaſdem abſciſſas habentibus in curva, cujus ordinatę ſint datæ curvæ ordinatis q reciprocè proportionales. Nec
(fig.29.) abſimilitèr ſi debeat curva CF talis eſſe ut, ducta

qua-

quavis ordinata CB, quæ producta datam curvam DE secet in D, sit ordinata BD ęqualis subnormali curvæ quęsitæ CF, undè æquatio sit $\frac{ydy}{dx} = q$, erit $ydy = qdx$. Curva igitùr prima erit cujus ordinatæ sic dentur per suas abscissas ut y datur per y hoc est, erit non curva, sed recta angulum cum axe semirectum constituens, ejusque quadratrix proindè erit parabola communis. Curva porrò secunda erit ipsa DE, quia ejus abscisis existentibus x, debent ordinatę esse q. Ex propositę igitùr lineę DE quadratrice, & ex communi parabola construetur quæsita linea; cujus ęquatio $ydy = qdx$ brevius reduci potuisset integrando primam partem, quæ est integrabilis & fiet $yy = 2\int qdx$, undè quadrata quęsitarum ordinatarum BC dupla esse reperientur spatiorum correspondentium ABDE in proposita curva.

## *COROLL.*

93 HOc exemplum maximę est universalitatis, quotiescumque enim valor subtangentis curvę describendę talis est, ut ordinata y illum non intret, sed per solam abscissam x exprimatur, semper casus erit hujus exempli, poterimus nempè semper, valorem illum subtangentis concipere tamquàm ordinatam curvę alicujus datæ, & vocare q, undè

quæsitio semper reducta erit ad illam quam superiùs solvimus, idemque valet de subnormali si exprimatur & ipsa per valorem, quem ordinata y nullatenus ingrediatur.

*Exemplum II.*

(fig. 2.) 94 Describenda sit curva AD habens pro axe circuli peripheriam AB centrum habentem in C, cujus curvę subtangens BT sit quomodocumque data per abscissam AB. Valor subtangentis BT in curva AD habente pro axe quamvis lineam AB (nu. 16.) est $\frac{yqdx + yydx}{qdy}$ positis AB = x, BD = y, & q radio osculi pertinente ad punctum B axis. Cum igitùr in hoc casu axis supponatur esse linea circularis, ejus radius q erit constans = a semidiameter ipsius axis; quarè subtangens $= \frac{yadx + yydx}{ady}$, quæ debet æquare quantitatem p datam quomodocumque per x, undè $yadx + yydx = apdy$, sivè $\frac{dx}{ap} = \frac{dy}{ay+yy}$ vel $\frac{adx}{p} = \frac{aady}{ay+yy}$, undè eruere est constructionē hanc (fig. 30.) traditæ regulæ conformem. Primò curva describatur KI, ejusque ordinata MI talitèr detur per suam abscissam LM ut $\frac{a^3}{ay+yy}$ datur per y, hoc est æquatio

tio curvæ KI esto $u = \frac{a^3}{ay+yy}$. Fiat porrò ejus quadratrix WNO talis scilicet ut ejus ordinata MN spatiis WÆMI per constantem a divisis sit æqualis (sumo spatia WÆMI, quę constante ordinata WÆ terminantur, quia spatia totalia intèr curvam, & asymptotum ŒL infinitæ sunt magnitudinis) quę quidèm erit qualem reprę sentat figura, & erit ad asymptotũ ŒL, acad aliã ŒZ, quę sit axi WL parallela in distantia $ŒL = l\,2a$ in logistica cujus a sit subtangens, & $l\,a = 0$. Construatur posteà secunda quædam curva SQ, in qua ordinatæ PQ sic dentur per suas abscissas PS ut $\frac{aa}{p}$ datur per x, & spatiis SPQ ad constantem a applicatis, ęquales ponantur ordinatæ PY novam constituentes curvam SY quadratricem ipsius SQ. Tùm, assumpta $LM = y$, ordinatæ correspondenti NM sic curva WNO æqualis abscindatur SX ex axe conjugato lineæ SY, & ducta ordinata XY hæc erit quæsita x; undè jàm poterimus, facto centro C, radio a describere circulum, assumptaque portione $AB =$ mox inventæ x, ducere deindè $BD =$ assumptæ y, sive LM figuræ 30, eritque punctum D in curva quęsita. (fig. 2.)

95. Potuissemus etiàm ęquationem $\frac{adx}{p}$ integrare saltèm logarithmicè, quia integrale ex $\frac{aady}{ay+yy}$

 est

est $ly - l\overline{a+y}$, undè ęquatio integrata fuisset $\int \frac{adx}{p} = ly - l\overline{a+y} + l2a$, quam constantem

(fig. 30.) addo ut posita $y = a$ sit ordinata NM quadratricis $= o$, sicque constructio coincidat cum ea quam superius tradidimus, idem enim est curvam NW describere quadratricem lineę IÆ ac ordinatam NM ponere ęqualem ubiq; quantitati $ly - l\overline{a+y} + l2a$, posito logarithmos sumi in logarithmica cujus a sit subtangens & $la = o$, cum spatium WÆMI per a divisum, sivè integrale ex $\frac{aady}{ay+yy}$ nil aliud sit quàm $ly - l\overline{a+y} + l2a$, uudè spatium infinitè longum inter WÆ, & curvam & asymptotum WM est $al2a$.

Exempla hęc sufficere posse judico, cum reliqua, quę referri possent per applicationem traditæ regulæ resolvi facilè posint; quarè satiùs fuerit his dimissis, ad ultimam sectionem omnium utilissimam properare.

SE-

# SECTIO ULTIMA.

*Conſtructio variarum æquationum differentialium primi gradus in quibus ambæ indeterminatæ cum ſuis differentialibus reperiuntur, nec tamen ſunt ab invicèm ſeparabiles, non exiſtente æquatione algebraicè integrabili.*

96 TAndèm conſiderandæ ſunt reliquę æquationes, quæ præmiſsis ſectionibus non clauduntur, ſuntq; omnes æquationes differentiales primi gradus algebraicè non integrabiles in quibus ambæ indeterminatę reperiuntur cũ ſuis differentialibus, nec apparet quomodo ab invicèm poſsint ſeparari. Si enim per conſuetas operationes antitheſim, ſcilicet aut multiplicationem diviſionemve ęquationis, via reperiatur qua ab invicèm illæ diſparētur, æquatio reducta erit ad formam præcedentis ſectionis, conſtrueturq; per regulas ibi traditas. Sed quando per nullam harum operationum ſeparatio obtineri poſsit, & opus ſit ſubſtitutione aliqua, ſivè ut aſſumātur aliæ indeterminatæ ab ijs, quas aſſumpſimus ad faciliorem redendam ſeparationem, vel ad quomodocumque commodiorem præparandam æquationem, tùnc via aperienda eſſet qua his

ſub-

substitutionibus, & denominationibus oportunè, & efficaciter semper uti possimus.

97 Sciendum est autèm, quod quamvis multæ inventæ sint, & plures etiàm inveniri possint regulæ, pro construendis quibusdam ex his equationibus quarum indeterminatæ non sunt per communes algorithmicas operationes ab invicèm extricabiles, nulla tamèn adhùc tradita est regula universalis omnes tales æquationes complea, ità ut statim ac æquationem invenerimus posimus ope canonis alicujus ad ejus effectionem certò manuduci. Quod si repertum esset, nihil ampliùs circà æquationes differentiales primi gradus desiderandum foret, seù circà methodum tangentium inversam, sivè ut vocant subtangentalem. Cùm enìm, data tangentis proprietate, per Sectionis primæ regulas ad æquationẽ statim quæsitę curvę differentialem primi gradus deducamur, si harum deindè æquationum nulla non posset per notas regulas effici, jàm curvam ipsam cujus data est proprietas in potestate esse confidentèr possemus pronunciare, siquidèm data tangentis conditio talis esset, ut ęquationem differentialem primi gradus suppeditaret.

98 Hæc igitùr duo præcipuè desunt perfectioni totius Theorię ęquationum differentialium primi gradus. Primò (quod Sectione secnnda pręnotavimus) methodus indicans an quęvis proposita ęquatio sit algebraicè integrabilis, & detegens ejus inte-

gra-

grale algebraicum, si possibile sit; seù modus (idem enìm est) cognoscendi integrale algebraicum, si detur, cujusvis quantitatis differentialis primi gradus, aùt ejus impossibilitatem evincendi. Hùc pertinent quadraturæ spatiorum curvilineorum, rectificatio itèm curvarum, solidorum, & superficierum dimensiones, inventiones centri gravitatis, & complura hujusmodì. Alterum autèm quod adhùc desideratur, est constructio universalis omnium æquationum primi gradus indeterminatas inseparabiles claudentium, hoc est via regia infallibilis perducens ad constructionem curvæ quæsitæ quotiès inventa sit ejus differentialis æquatio primi gradus, licèt in illa indeterminatæ cum suis differentialibus sint ab invicèm inseparabiles.

Sicutì igitùr in secunda Sectione ex deffectu regulæ universalis, plures particulares regulas congessimus, easq; ut canones tradidimus, quibus sæpè deffectum universalis regulæ suppleri accidit, ità & in præsenti exponemus solùm quasdam regulas pro certis æquationibus, duplicem indè fructum collecturi, & ut hos canones in multam universalitatem expansos pro usu servemus, & ut semitam simùl aperiamus qua in multis similibus casibus æquationum præparatio, & constructio sit tentanda.

Quamvis tamèn is optimè de subtangentali methodo meritus censendus sit, qui plures harum regularum collegerit, & in ordinem redactas publico fue-

fuerit impertitus, nos nihilominùs ad finem festinantes paucas assumemus, easq; ad hunc finem præcipuè accomodabimus ut ijs, quibus egregia celeberrimorum Virorum inventa abscondita nimis videãtur facem præferamus, inventisque ipsis omnem cujus capaces sunt universalitatem conciliemus.

*Propositio I.*

(fig.31.) 99 Sit primò curva AHEC describenda, cujus ordinata quævis BC sit ad portionem AD subtangentis intèr verticem, & tangentem in ratione constante data 1 ad *n*. Erit igitùr proportio y, $\frac{ydx - xdy}{dy}$ :: 1, *n*, & æquatio $ydx - xdy = nydy$, in qua æquatione quantumvis transferas ab una ad alteram partem terminos, aùt dividas, multiplicesve totam æquationem per quamcumq; quantitatem, nunquàm sic poteris reducere, ut y cum dy constituat unam æquationis partem, quam nullatenùs x, nec dx afficiat. Uno verbo æquatio non est ex ijs quarum indeterminatę cum suis differẽtialibus sint
(nu.88.) separabiles ab invicèm. Videamus igitùr quomodonàm $ydx - xdy = nydy$ possit reddi construibi-
(nu.41.) lis. Quo ad membrum $nydy$, illud sanè est integrabile, sed pars $ydx - xdy$ non erit integrabilis. Si scriptum esset $ydx + xdy$, manifestè integrabilis foret etiàm hæc æquationis pars, & integrale esset xy, ha-

haberemus itaquè integrando æquationem $xy = \frac{nyy}{2}$, sivè $xy \mp aa = \frac{nyy}{2}$. Id ostendit quod si quæsivissemus lineam, cujus subtangentis summa cum abscissa haberet ad ordinatam rationem datam, incidissemus utiquè in ęquationes satisfacientes $xy = \frac{nyy}{2}$ (sivè $x = \frac{ny}{2}$) & $xy \mp aa = \frac{nyy}{2}$, quia tùnc ęquatio esset $ydx + xdy = nydy$. Verùm in casu nostro, cum ęquatio sit $ydx - xdy = nydy$, non possumus eâdem methodo procedere. Sicuti autem $ydx + xdy$ habet integrale $xy$, ità $ydx - xdy$ statìm suspitionem facit nùm fortè haberet $\frac{x}{y}$, & sanè haberet si scriptum esset $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Dividatur igitùr ęquatio inventa $ydx - xdy = nydy$ utrinquè per $yy$, & erit $\frac{ydx - xdy}{yy} = \frac{ndy}{y}$; multiplicemus tantùm per $a$ æquationem (si lubeat) & erit $\frac{aydx - axdy}{yy} = \frac{nady}{y}$, quę integratur, & erit $\frac{ax}{y} = nly$, undè $x = \frac{nyly}{a}$. Curva secundum hanc æquationem constructa est qualem exponimus in figura casu quo $n = 1$, AE a, AB $= x$, BC $= y$, $la = o$. Maxima HG est cum fuerit $ly = -a$, hoc est logarithmus suæ abscissæ GA debet esse $= -a$. Spatiū quodvis AGH est $= \frac{2nyyly - nyya}{4a}$,

undè in casu figuræ quo $n = 1$ erit spatium quodvis AGH $= \frac{2yyly - ayy}{4a}$, sivè tùnc spatium AEHA $=$ aa quadrato ex dimidia AE. Solidum ex revolutione figuræ EHA circà axem EA est ad cylindrum cujus basis sit circulus radio EA, & altitudo æqualis radio, ut $2nn$ ad 27, & si $n$ fuerit 1, erunt solidum & cylindrus ut 2 & 27. Vocando enìm b semiperipheriam circuli cujus a sit radius, erit circulus cujus quævis HG sivè x, sivè $\frac{nyly}{a}$ sit radius $= \frac{nnbyyly^2}{a^3}$, & elementum solidi ex revolutione figuræ cujusvis AGH circà AG erit $\frac{nnbyyly^2 dy}{a^3}$, ergò solidum illud hujus quantitatis integrale erit
(nu.62.) æquale quantitati $\frac{9nnby^3ly^2 - 6nnaby^3ly + 2nnaaby^3}{27a^3}$ nec aliquid constans addendum est, cum evanescat evanescente y. Posito igitùr $ly = 0$, & $y = a$ erit solidum ex revolutione totius figuræ AHGEA circà AE $= \frac{2nnbaa}{27}$, & cũ cylindrus radiũ basis, & altitudinem habens a sit aab, erit solidum illud ad cylindrum hunc, ut $2nn$ ad 27.

*Propositio II.*

100 SI ratio ordinatæ CB ad resectam AD non sit constans, sed sit illa quam habet 1 ad quan-

quantitatem $n$ quomodocumq; datam per y, eadem erit æquatio, ſed jam $n$ non erit conſtans ſed variabilis, & data per y. Undè, facta operatione quæ ſuprà, invenietur $\frac{ax}{y} = \int \frac{nady}{y}$, undè $x = y \frac{\int \frac{nady}{y}}{a}$, vel $x = y \int \frac{ndy}{y}$. Conſtruenda igitùr eſt curva (aſſumpta ad arbitrium AI, vel CB $=$ y) cujs ordinatę ſint $\frac{n}{y}$ (poſitis y abſciſſis), tùm fiat, ut conſtans quam vocavimus 1 ad y:: ità ſpatium quod curva hæc cum axe ſuo claudit, diviſum per eandem 1 ad quartam, quę quarta erit x quæſita, erit enìm manifeſtè $= y \int \frac{ndy}{y}$.

101 Hoc idem quæſitum ſic aliter exponetur: Data curva AK, alia deſcribatur AHEC, talis ut, ſi quævis prioris curvę ordinata IK producatur uſquè ad quæſitam lineam in C, ducaturque per C tangens CD, axem alium AD priori coniugatum ſecans in D, portio AD tangentem hanc & verticem A intercepta, ſit ad abſciſſam IA, ut ordinata IK ad conſtantem. Hinc ſi AK fuerit cujuſvis gradus $m$ parabola, cujus ſiquidèm ordinatæ IK ſivè $n$ æquentur poteſtatibus ab $m$ denominatis abſciſſarum correſpondentium IA, erit curva quæſita parabola generis uno gradu altioris ſive exponentis

$m+1$, cujus parameter ſit ad parametrum propo-
(nu. 57. & ſeq.) ſitæ ut 1 ad $m$. Si AK ſit una ex curvis quas ſuprà conſideravimus, ità ut IK ſit quævis poteſtas logarithmi ſuæ abſciſſæ IA, ſic ut $n = ly^r$, erit IC $= y \int \frac{ly^r dy}{y}$. Eſt autèm ſemper $\frac{ly^r dy}{y}$ integrabi-
(nu. 61.) lis, & integrale eſt $\frac{ly^{r+1}}{r+1}$ (poſita ſubtangente logarithmicæ pro unitate) undè x ſivè IC $= \frac{yly^{r+1}}{r+1}$. Nec plura addimus rem ſatis explicatam ducentes.

*Propoſitio III.*

(fig. 32.) 102 Debeat deſcribi curva AC hanc ubiquè ſervans proprietatem ut, ducta per quodvis in ea punctum C tangente, quę axem in D ſecet, intercepta AD, ſivè ut vocant, ſubtangentalis habeat ad tangentem DC conſtantem rationem. Si ratio hæc ſupponatur eſſe quæ q ad p incidemus in
(nu. 10.) æquationem alibì allatam $ppyydx^2 + ppxxdy^2 - 2ppyxdydx = qqxxdx^2 + qqxxdy^2$, vocando EA $= x$, & EC $= y$. Sed æquatio hęc nimis implicita eſt, ità ut per illam ad conſtructionem quæſitę lineæ non facilè deducendi ſimus. Tentandum erit igitùr nùm, aſſumendo pro indeterminatis alias lineas ab ipſis AE, EC, ęquatio reſultans faciliùs ſit extricabilis.

Ma-

Maximè intereſt in problematum ſolutione quando ex data tàngentis proprietate indaganda eſt linea cui competit, quænam pro indeterminatis ſeligantur, mirum enìm in modum variantur ęquationes ſi hæ, vel illę potiùs quàm alię coordinatę fuerint aſſumptæ. Nec tamèn datur regula docens, quænam indeterminatæ ſint præeligendæ, ut ſimpliciſſimam obtineamus æquationem, quæque maximè omnium capax ſit conſtructionis, caſu enìm potiùs quàm induſtria ad illas pervenitur, utpotè quod optioni fortuitæ, & arbitrariæ unicè ſit tribuendum.

103 Non raròtamèn evenit, quod ſi pro coordinatis curvæ quæſitę aſſumantur illę eædem lineę, quæ ex vi datæ proprietatis, ſeù conditionis apparent habere ad invicèm ſimpliciſſimam velutì relationem, ad æquationem perveniatur conſtructioni magis accomodam, quia ſcilicèt illæ lineæ, quarú relatio omnium ſimpliciſſima cenſetur ut plurimùm etiàm æquationem (qua illa relatio eſt tantùm exprimenda) ſimpliciſſimam continebunt, ac proindè faciliùs tractabilem, & faciliùs conſtruibilem. Quę tamen regula, ut apparet, non pro axiomate quodam haberi debet univerſali, atq; infallibili, ſed tantùm inſervire debet ad hoc ut, poſtquam per alias vias tentaverimus conſtructionem ęquationum, etiàm per hanc periculum faciamus, ſępè enìm inveniemus rem felicitèr ſuccedere.

104 In caſu propoſiti problematis, res ità ſe habet. Conditio eſt, ut DC ad AD, habeat rationem conſtantem, quam vocabimus unitatis ad $n$. Aſſumemus igitùr ipſam DC pro una indeterminatarum, quia ſimpliciſſima eſt ipſius DC propietas quę datur. Vocabimus igitùr $DC = x$, undè AD $= nx$, ex data proprietate. Ad determinandum autèm punctum curvæ C non ſufficit aſſumpſiſſe AD $= nx$, & $DC = x$ niſi ſimùl determinetur quonam angulo DC debeat ad axem inclinari; non enìm ſufficit harum linearum longitudo, niſi ſimùl, & ipſius DC poſitio determinetur; opus eſt igitùr aliam indeterminatam aſſumere y, progreſsù operationis per aſſumptam x, & $nx$ notificandam. Linea quæ ſimpliciſſimè poſititionem ipſius DC determinet eſt CB, vel BD, vocemus ergò exempli gratia $BC = y$, undè $BD = \sqrt{xx - yy}$. His denominationibus inſtitutis, conditio ad æquationem nos ducens erit hæc; quod DC ubiquè ſit tangens, ſivè quod differentiale ordinatæ CB y, ad differētiale abſciſſæ AB $nx + \sqrt{xx - yy}$ ſit ut ipſa ordinata y ad BD $\sqrt{xx - yy}$. Factis igitùr horum differentialium valoribus, erit proportio $dy, \dfrac{ndx\sqrt{xx - yy} + xdy - ydy}{\sqrt{xx - yy}} :: y, \sqrt{xx - yy}$, ex qua eruetur æquatio ſed quæ tamèn æquè ac illa, quam initio attulimus non eſt manifeſtè integrabilis. Ratio autèm quare ſit adeò implicita æqua-

tio ad quam per hanc viam devenitur eſt, quod poſtquàm per multiplicationem extremorum, & mediorum ex quatuor terminis huius analogiæ obtinuerimus æquationem, opus eſt illam quadrare ad eleminandas quantitates ſurdas, quia ſignum radicale continet utramque indeterminatam, ac pro indè ut earum ſeparatio tentetur, opus eſt ſigna radicalia tollere, undè fit ut ęquatio magis magisquè difficilis fiat, miſcentur enim ſic meliùs ad invicèm x, & y.

105 Verum quidèm eſt, quod ſi vocaverimus non CB, ſed BD $=$ y, inveniſſemus ęquationem minus compoſitam; erit nempè AB $= nx + y$, CB $=\sqrt{xx-yy}$; undè aſſumptis harum differentialibus, proportionales erunt $\frac{xdx-ydy}{\sqrt{xx-yy}}$, $ndx+dy$ :: $\sqrt{xx-yy}$, y, & facta æquatione, opus tantùm erit illam reducere ad communem denominatorem, ut ſigna radicalia omninò tollantur, & æquatio proveniet $nxxdx - nyydx + xxdy = xydx$; ſed tamèn hęc eadem æquatio non apparet quomodò conſtruibilis ſit, neque enim videmus quomodò illam integremus, nec quomodo indeterminatas ab invicèm ſeparemus.

106 Satiùs igitùr eſt ut curemus irrationales quantitates evitare denominando talitèr ut $\sqrt{xx-yy}$ ſit quãtitas rationalis, ſivè ut $xx-yy$ ſit quadratum;

notum est autèm, quod formula omnium simplicissima pro efficiendo ut $xx - yy$ sit quadratum est si ponatur $xx - yy = xx - 2yxz + yyzz$. sìc enìm invenietur $y = \frac{2xz}{zz + 1}$ quod indicat, lineam CB, quam vocabamus y debere vocari $\frac{2xz}{zz + 1}$, ad hoc ut $xx - yy$ sit aliquod quadratum, & $\sqrt{xx - yy}$ sit quantitas rationalis. Sanè si ex $xx$ demas quadratum quantitatis $\frac{2zx}{zz + 1}$ reliquum erit quadratum cuius radix erit $\frac{zzx - x}{zz + 1}$ vel etiàm $\frac{x - zzx}{zz + 1}$.

107 Denominemus igitùr tandèm $DC = x$, $AD$ $nx$, & $CB = \frac{2zx}{zz + 1}$, cuius differentiale invenietur esse $\frac{2z^3dx + 2zdx + 2xdz - 2zzxdz}{z^4 + 2zz + 1}$. Erit ergò $DB$ $= \frac{x - zzx}{zz + 1}$, quę addita ad AD quæ est $nx$ facit AB $= \frac{nzzx + nx + x - zzx}{zz + 1}$, cuius differentiale erit $= \frac{nz^4dx + 2nzzdx - z^4dx + ndx + dx - 4zxdz}{z^4 + 2zz + 1}$, undè analogia ex proprietate tangentis petita sic explicabitur $\frac{2z^3dx + 2zdx + 2xdz - 2xzzdz}{z^4 + 2zz + 1}$, $\frac{nz^4dx + 2nzzdx - z^4dx + ndx + dx - 4zxdz}{z^4 + 2zz + 1} :: \frac{2zx}{zz + 1}$,

$\frac{x - zzx}{zz + 1}$, quæ ſuppeditat ęquationem $nz^5 dx + 2nz^3 dx + nzdx - xz^4 dz - 2xzzdz - xdz = 0$, quę diviſa per $z^4 + 2zz + 1$ dat $nzdx = xdz$, undè $\frac{ndx}{x} = \frac{dz}{z}$, & integrando $nlx = lz$, poſita unitate pro ſubtangente, aùt etiàm quavis alia conſtante ad arbitrium; & (nu. 57.)
abiectis logarithmis, ſivè aſſumptis quantitatibus, quarum ambo ęquationis membra ſunt logarithmi, erit $x^n = z$, eſt autèm $CB = \frac{2zx}{zz + 1}$, ergò, poſito pro $z$ valore $x^n$, erit $CB = \frac{2x^{n+1}}{1 + x^{2n}}$.

108 Si loco ponendi CB, poſuiſsemus $DB = \frac{2zx}{zz + 1}$, & $CB = \frac{x - zzx}{zz + 1}$, æquatio ad quam peruentum fuiſſet, eandem curvam reſtituiſſet; inventis ſcilicèt differentialibus ex BC, & AB, ſi ęquatio inſtituatur, invenietur eſse $nz^6 dx + nz^4 dx - 2xz^4 dz - nzzdx - ndx - 2xdz - 4zzxdz = 0$, quæ diviſa ut ſuprà per $z^4 + 2zz + 1$ dediſset $nzzdx = ndx + 2xdz$, ſivè $\frac{ndx}{x} = \frac{2dz}{zz - 1}$, cumque fractio hęc $\frac{2dz}{zz - 1}$ ſit ęqualis fractionibus $\frac{dz}{z - 1} - \frac{dz}{z + 1}$, eſset $\frac{ndx}{x} = \frac{dz}{z - 1} - \frac{dz}{z + 1}$, & integrando $nlx = l\overline{z - 1} - l\overline{z + 1}$, & abiectis lo-

garithmis $x^n = \frac{z-1}{z+1}$, quod explicari non indiget, notum est enìm quod differentia duorum logarithmorum ex duabus quantitatibus est logarithmus quotientis ex divisione unius per alteram ex illis. Ex hac porrò æquatione erues $\frac{x^n+1}{1-x^n} = z$, & cum CB sit $\frac{x-zzx}{zz+1}$, invenietur esse CB $= \frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ prorsùs ut inveneramus etiàm per præcedentem denominationem. Quod indicasse sufficiat, ut unusquisque possit, si calculi molestiam ferre velit, à se ipso experiri.

109 Patet itaquè æquationem ipsam $xxdy = nydx\sqrt{xx-yy} + xydx$, quæ eruitur ex analogia $dy$,
(n.104.) $\frac{ndx\sqrt{xx-yy}+xdx-ydy}{\sqrt{xx-yy}} :: y, \sqrt{xx-yy}$, fuisse integrabilem, quod si inito statìm licuisset animadvertere, jàm per has substitutiones non opus fuisset ipsius $y$ valorem derivare. Est igitùr, ut breviùs innuam, ipsius æquationis $xxdy - nydx\sqrt{xx-yy} - xydx = 0$; æquatio integralis $\frac{x-\sqrt{xx-yy}}{yx^n} = 1$ vel ad salvandam terminorum homogeneitatem erit, si lubeat, $\frac{xa^n - a^n\sqrt{xx-yy}}{y} = x^n$ undè eruitur $y = \frac{2x^{n+1}a^n}{a^{2n}+x^{2n}}$ prorsùs ut suprà inveneramus.

110 Ad obtinendum igitùr valorem lineæ CB si $n$ fuerit numerus rationalis, vel integer, vel fractus, vel positivus, vel negativus, opus erit tantùm assumere AE = quantitati inventæ $\frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$, quæ tùnc erit algebraica, quia assumpta x datur ejus quævis potestas $n+1$, vel $2n$, vel quævis alia, cujus exponens sit in ratione effabili ad unitatem, datur scilicèt ope paraboloidis ejusdem gradus $n+1$, vel $2n$, & mille alijs modis. Sed si $n$ esset numerus irrationalis, ad inveniendum $x^{n+1}$, vel $x^{2n}$, recurendum est ad logisticam, in qua ordinando ad asymptotum x, & deindè ejus logarithmum summendo $\overline{n+1}$ vel $2n$ vicibus, haberemus logarithmos $x^{n+1}$, $x^{2n}$, undè quantitatem $\frac{2x^{n+1}}{1+x^{2n}}$ facilè possemus componere, qua super axe AE assumpta, ducatur per E ipsi AB parallela, tùm asumpta AD $= nx$, cētro D intervallo DC $= x$ circulus ducatur secturus, ductâ EC in C puncto curvæ cujus semper ipsa CD tangens erit, ac proindè tangens erit ad portionem AD, quam ab axe rescindit ut $n$ ad 1; quod erat faciendum. Si $n$ sit $= 2$, erit (posita a pro unitate) CB $= \frac{2aax^3}{a^4+x^4}$.

*Propositio IV.*

111 Possumus in multis alijs casibus uti eadem denominandi regula, qua superiùs usi sumus.

mus. Ut si jubeamur curvam AC describere cujus ea sit lex, ut ducta tangente ad quodvis in ea punctum C, sit quævis potestas data $m$ hujus tangentis CD, ad quamvis potestatem $r$ resectæ AD, ut 1 ad $n$ (undè vocando $DC = x$, sit $AD = n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}}$) utile erit si vocemus CB ut suprà $= \frac{2zx}{zz+1}$, undè BD $= \frac{x - zzx}{zz+1}$, & $AB = \frac{n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}} zz + n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m}{r}} + x - zzx}{zz+1}$, cujus differētiale

$$\frac{\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} z^4 x^{\frac{m-r}{r}} dx + \frac{2m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} zzdx + \frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} dx + dx - 4zxdz - z^4 dx}{z^4 + 2zz + 1},$$

facta deindè analogia intèr differentiale CB, differentiale AB :: CB, & BD, orietur æquatio $\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} z^4 x^{\frac{m-r}{r}} dx + \frac{2m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} z^2 dx + \frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} zdx - z^4 xdz - 2zzxdz - xdz = 0$, quā dividamus per $z^4 + 2zz + 1$, & habebimus $\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} zx^{\frac{m-r}{r}} dx = xdz$, seù $\frac{m}{r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-2r}{r}} dx = dz$

$=\frac{dz}{z}$, & integrando $\frac{m}{m-r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}} = lz$. Conſtruetur (nu.57
igitùr curva quæſita ſi, deſcripta logaritmica cujus 1 ſit ſubtangens, & aſſumpta ad arbitrium x, abſcindatur ex ejus axe portio $= \frac{m}{m-r} n^{\frac{1}{r}} x^{\frac{m-r}{r}}$ (quæ erit algebraica ſi *m*, & *r* fuerint numeri commenſurabiles) & per ejus extremum ducatur ordinata uſq; ad logiſticā, quę erit z, tùm verò fiat, ut quadratum tangentis, quæ per punctum ſic inventum logiſticæ ducitur, ad rectangulum xz, ità duplum ſubtangentis ad quartam, quæ erit $\frac{2zx}{zz+1}$ ipſa ſcilicet CB, qua aſumpta in AE, ductaque axi AB parallela AC, & extenſa AD $= nx$, ſi centro D radio x circulus ducatur, hic ſecabit rectam EC in quæſitæ curvæ puncto C.

### *Propoſitio V.*

112 MUltotiès etiàm poſt inventam ęquationem, quę quomodo conſtruibilis ſit non conſtet, ope ſubſtitutionis alcuius, reducitur illa ad faciliores terminos, abſque eo quod totam denominationem mutando, ut in anteced. Propoſit: illam funditus evertere, ac variare neceſſum ſit.

Eſto

(fig. 33.) Esto construenda curva AC, cujus ordinata BC, sit ad subtangentem BT, ut constans AG, ad differentiam coordinatarum AB, BC, sivè ad portionem NG, posito rectam AN efficere angulum BAN graduum 45. ità ut $y, \frac{ydx}{dy} :: a, y-x$; eritque æquatio $adx = ydy - xdy$. Hanc æquationē diligentèr consideranti non erit difficile invenire, quæ nam substitutiones fieri debeant, ut in determinatæ ab invicèm separabiles reddantur. Cum enìm in æquatione adsit ydy quantitas per se ipsam integrabilis, reliquum est ut quæramus, quomodonam (salva integrabilitate termini ydy, & æquatione $adx + xdy = ydy$) reliqui duo termini adx, & xdy simul sumpti possint quid integrabile efficere. Membrum porrò xdy non est integrabile nisi adsit suum correspondens ydx, tunc enìm hi duo termini simùl juncti integrale habent xy. ad hoc igitùr ut hi duo termini $xdy + adx$ sint integrabiles opus est ut quantitas, cuius differentiale in primo termino invenitur ductum in x sit illa eadem, quę multiplicet dx in secundo. Ideò enìm $udt + tdu$ est integrabilis quantitas, quia litera t cujus differentiale in primo termino udt multiplicat u, est illa eadem quæ in secundo multiplicat du. Debebit igitùr pro dy poni $\frac{adz}{z}$, sivè pro y poni lz, sic enìm quantitas adz multiplicabit x (cum debeat illa po-

ni

ni pro dy in termino xdy) & quantitas z, quę eſt in denominatore multiplicabit adx alium terminũ, ſiquidèm æquatio reducatur ad communem denominatorem, remanente ad hùc termino ydy, poſt ſubſtitutionem, & reductionem æquationis ad cõmunem denominatorem, ſaltèm tranſcendenter integrabili.

113 Facta porrò ſubſtitutione lz pro y, & $\frac{adz}{z}$ pro dy, æquatio erit $adx + \frac{xadz}{z} = \frac{lzadz}{z}$, ſivè $zadx + xadz = lzadz$, cujus ęquationis diviſæ (ſi lubeat) utrinquè per a integralis ęquatio eſt $xz \pm aa = zlz - az$, vel etiàm $xz = zlz - az$. Ex hac deducitur $x = lz - a$, ſivè $x = y - a$, ſed ex illa eruitur $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, ex quibus valoribus deſcribetur linea quęſita duplex, altera recta, ex æquatione $x = y - a$, altera curva $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, ſivè $x = y - a \pm \frac{aa}{z}$. At ſi poſuiſſemus $y = -lz$, & pro dx, $-\frac{adz}{z}$, ęquatio $adx = ydy - xdy$, mutata fuiſſet in $zdx - xdz = lzdz$, pro qua integranda eſt opus dividere per zz, nàm $zdx - xdz$ non eſt integrabilis niſi dividatur per zz. erit igitùr æquatio $\frac{zdx - xdz}{zz}$

$= lz$-

$= \frac{lzdz}{zz}$, cujus integrale $\frac{x}{z} = \frac{-lz - a}{z}$ sivè $\frac{x}{z} \pm 1 = \frac{-lz - a}{z}$. Harum æquationum prima dat $x = -lz - a$, sivè $x = + y - a$, secunda porrò dat $x = -lz - a \pm z = y - a \pm z$.

## COROLL.

114 Hinc illud manifestum fit, quomodò eadem differentialis æquatio possit varijs lineis non genere tantùm diversis quadrare, sed alteri algebraicæ, alteri transcendenti æquè satisfacere. Æquatio enim superior $adx = ydy - xdy$, æquè quadrat rectæ $x = y - a$, ac transcendentibus curvis $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, & $x = -lz - a \pm z$, posito lz ibì, hìc verò $-lz = y$, hocque fit, vi constantis illius, quæ si negligatur in integratione ęquationis, poterit hæc dividi, vel multiplicari per z, evanescẽre sic omninò z, & sola remanente arbitraria lz, cum aliàs si constans illa adiungatur, remansura sit z cũ suo lz, ac proindè curva algebraica non erit, sed tantùm transcendens.

## COROLL. II.

115 Velim etiàm duo diligentèr adnotari. Unum est æquatio $x = lz - a$, quę licèt con-

contineat logarithmicam quantitatem nullo modo eſt ad curvam tranſcendentem, ſed ad rectam nullius logarithmicæ indigentem ut ducatur. Quantitas ſiquidèm lz in ſe eſt quantitas ordinaria quin & arbitraria, ſed tantùm eſt tranſcendens reſpectu quantitatis z quia data lz, invenire z, vel data z invenire lz problema eſt tranſcendens; invenire autèm ſimpliciter lz, ſivè logarithmum arbitrarię z adeò ab omni difficultate liberum eſt, ut arbitraria tantùm linea ſit aſſumenda, quia unaquævis linea, quæ aſſumatur, eſt logarithmus alterius lineæ. Igitùr lz in omni ęquatione pro aliqua curva in qua ęquatione z non compareat non debet cenſeri quantitas tranſcendens, ſed ordinaria, & æquatio illa, non ad curvam tranſcendentem, ſed ad algebraicam, niſi aliud adſit, quod æquationem illam tranſcendentem efficere poſſit.

116 Alterum, quod obſervare conducit eſt, duas æquationes $x = lz - a \pm \frac{aa}{z}$, & $x = -lza - a \pm z$, licèt diverſæ videantur, eandem tamèn curvam reſtituere, ſivè prima ęquatione, ſivè ſecunda uti malimus. Iubet enìm poſterior hęc æquatio, ut ſi curvam AC deſcribere velimus cujus ordinata BC ſit ad ſubtangentem BT ut conſtans AG ad differentiam qua BC excedit AB, deſcripta ad aſymptotum KD logiſtica (eſt autèm KD ad GB normalis per A) cujus ipſa AG ſit ſubtangens, quæque ad aſymptotum accedat

ad partes D, qualis est IGE, & cujus initium fiat in A, assumatur quęvis $AD = -lz = y$, erit enim $DE = z$; tùm additis duabus AD, DE, ex earum summa dematur a, reliquumque applicetur in DC, & sic punctum C erit in optata curva. Prior autèm æquatio iubet describi logisticam quidèm eiusdem subtangentis AG, sed quæ accedat ad axem ad partes K, qualis est FGH tùm, asumpta arbitraria $AD = lz$, & ducta ordinata DF, quę erit z, iubet inveniri tertiam post FD, & GA, eamque addi ad AD, & ex summa tolli a, sicque ordinatam DC inventum iri docet. Patet autèm si logistica GE producatur in I, summaturque $AK = AD$, futuram $KI = DF$, sed cum sint DA, AK æquales, erit ex logisticæ proprietate ED, AG :: AG, KI sivè FD, est ergò FD tertia post DE, & AG, sivè viceversa, ED tertia post FD, & AG; cum igitùr debeamus ex vi ęquationis $x = lz - a + \frac{aa}{z}$ hanc tertiam addere ad AD, & hæc tertia sit ipsa DE, manifestum fit, hanc constructionem eandem esse cum constructione æquationis $x = -lz - a + z$, eandemque numero curvam subministrare.

117 Æquatio altera $x = y - a$ est ad rectam GL, tangentem logisticam GE in G, sivè angulum 45. graduum facientem ad punctum G cum recta AG. Hæc recta, quæ & ipsa satisfacit quæsito asymptotus est curvę AC per expositam constructionem prędescriptę; posita $AD = -lz$, cū sit $DC = -lz - a + z$, si de-

si demas ex hac lineam DM, reliquum MC erit $= z$, quia DM sivè illi ęqualis DL est $= lz - a$. Auctis autèm per ęqualia intervalla lineis AD, est certum, & correspondentes GM per ęqualia intervalla augeri, quibus cum ordinatę $MC = z$ competant, quę geometricè decrescunt, patet curvam AC fore logisticam quandam ad asymptotum GM, ordinatas tamèn ad illum habentem in angulo semirecto inclinatas.

*Propositio VI.*

118 PRoblema præcedentis propositionis non multùm variabitur si curva sit describenda in qua reciprocè applicata sit ad subtangentem ut portio NC ad constantem. Verùm si pro recta AN figuræ 33. substituatur curva quævis AC, ità ut (fig. 34.) curva quæsita ED hanc habeat proprietatem ut ejus ordinata ità sit ad subtangentem, ut differentia intèr datam ordinatam BC curvæ datæ AC, & quæsitam BD, ad constantem a, æquatio ad quam pervenietur, erit quidèm magis composita, sed per eandem tamèn regulam poterit reduci, qua superiore propositione sumus usi. Vocando igitùr $AB = x$, $BD = y$, $BC = q$ manifestum est q dari per x, nil aliud enìm importat dari curvam AC quam notum esse quomodo ordinata quævis CB dependeat à sua abscissa AB. Proprietas porrò curvæ ED importat ut $y, \frac{ydx}{dy} :: y - q, a$; undè $ady = ydx - qdx$. Est au-

(n.112.) tèm hìc eodem ratiocinio utendum quo supra usi sumus. Cum enìm $qdx$ sit transcendentèr saltèm integrabile membrum, reliquum est ut talis substitutio adhibeatur loco $dx$ ut duo membra $ady$, $ydx$ in æquatione $qdx = ydx - ady$ integrabilia existant; invenietur itaque substitui posse $dx = \frac{adz}{z}$, undè $x = lz$. Facta substitutione erit $qadz = yadz - azdy$, ubi $q$ datur per $z$, quia cum notum sit quomodo $q$ detur per $x$, & cum $x$ sit $= lz$, notum etiàm erit quomodo $q$ detur per $lz$, ac proindè etiàm quomodo detur per $z$. Dividendo deindè equationem hanc per $zz$ erit $\frac{qdz}{zz} = \frac{ydz - zdy}{zz}$, undè integrando $\int \frac{qdz}{zz} = -\frac{y}{z}$, aùt $\int \frac{qdz}{zz} \pm 1 = -\frac{y}{z}$, undè vel erit $y$ absolutè $= -z \int \frac{qdz}{zz}$, vel erit $y = -z \int \frac{qdz}{zz} \pm z$. Si posuissemus $x = -lz$, & $dx = -\frac{adz}{z}$, equatio fuisset $qdz = ydz + zdy$, quæ integrata dedisset $\int qdz = yz$, vel $\int qdz = yz \pm aa$, & sic $y = \frac{\int qdz}{z}$ vel $y = \frac{\int qdz}{z} \mp \frac{aa}{z}$.

119 Constructio igitùr talis erit ad primam æquat. $y = -z \int \frac{aqdz}{zz}$; fiat ad asymptotum AB logi-

giſtica, cujus (exemp. gratia) AF ordinata per A ſit ſubtangenti æqualis, quæque producta ab aſymptoto diſcedat ad partes B. Tùm aſſumpta quavis ordinata BG $= z$, erit AB $= lz = x$, & CB $= q$; tùm fiat $z, a :: q$, ad $\frac{aq}{z}$, cui æqualis ponatur BH, fietque ſic curva quædam AH. Elementum ſpatii ABH, erit ipſa BH ducta in differentiale ex AB, ſivè ex $lz$, quod differentiale eſt $\frac{adz}{z}$. Igitùr hoc elementum erit $\frac{aaqdz}{zz}$, & ſpatium ABH erit $\int\frac{aaqdz}{zz}$, quod ſpatium diviſum per a dat $\int\frac{aqdz}{zz}$; iàm fiat ut a, ad z, ità hoc ſpatiũ per a diviſum $\int\frac{aqdz}{zz}$ ad quartã $\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$, quę dematur ex z, & erit $z - \frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$, quantitas, quæ ex vi inventæ æquationis eſt $= y$. Aùt etiàm ſufficiet ſimplicitèr quantitatis ipſius $\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$ negativum abſquè ulla quantitatis z additione applicare in BD punctum enìm D etiàm ſic inventum erit in quæſita curva, cum ſit etiàm ex viſis $y = -\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$.

CO-

## COROLL.

120 Curva sic descripta multis in casibus poterit esse algebraica; & speciatim cum curva data AC fuerit de numero paraboloidum, siuè fuerit $q = x^n$, posito tamèn $n$ esse numerum integrum, & positivum. Cum enìm $q$ sit $= x^n$ sive $= lz^n$ quantitas $\frac{aqdz}{zz}$, sive $az^{-2}\, lz^n\, dz$, erit ex vi sæpè (nu.62.) memoratæ seriei, integrabilis & quidèm talitèr ut ejus integrale, prætèr simplicem z, quæ totum illud dividet, nulla z prætereà ingrediatur, sed solùm lz. Cum autèm integrale hoc debeat deindè ad obtinendam y multiplicari per z, dividi verò per a, evanescet omninò z ex quantitate $-\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$, sivè ex valore ipsius y, sola remanente lz, pro qua ponendo x, orietur inter x, & y æquatio purè algebraica, naturam quęsitę curvæ ED determinans. Exemplum sit casus, quo AC sit parabolois expressa per $q = \frac{x^3}{aa}$, sivè $= \frac{lz^3}{aa}$. In quo casu $\frac{aqdz}{zz}$ erit $= \frac{z^{-2}\, lz^3 dz}{a}$. Hujus quantitatis integrale subministrat sępè citata series, estq; $\int\frac{z^{-2}\, lz^3 dz}{a} = \frac{-lz^3 - 3alz^2 - 6aalz - 6a^3}{az}$, igitùr $-\frac{z\int\frac{aqdz}{zz}}{a}$ erit $= \frac{lz^3 + 3alz^2 + 6aalz + 6a^3}{aa} = y$

$= y$ (si velimus uti æquatione $y = -z \int \frac{\frac{aqdz}{zz}}{a}$) tùncque substituendo x pro lz erit æquatio purè algebraica $x^3 + 3axx + 6aax + 6a^3 = aay$ pro curva quæsita.

At si utamur alia æquatione $y = z - z \int \frac{\frac{aqdz}{zz}}{a}$ curva non erit algebraica frustrà enìm fit substitutio in quantitate $lz^3 + 3alz^2 + 6aalz + 6a^3$ literæ x pro lz, cum deindè adiungi debeat z, sicque non omninò tolli possit litera z, quo fit ut quantitas x sit purè transcendens, logarithmus nempè ex ipsa z.

Reddit igitùr casus, quo eadem æquatio differentialis $ady = ydx - qdx$ duabus communis fit curvis, uni quidèm algebraicæ, alteri transcendenti, quod & præcedente Propositione interdùm accidere notaveramus. (n.114)

### COROLL. II.

121 EOdem porrò processu patet quod si q constiterit ex quotvis terminis, quorum singuli habeant x ad quamvis potestatem integram, & positivam, erit curvarum quæsito nostro satisfacientium altera algebraica, altera transcẽdens. Quod ostendetur facilè, applicando cuivis ex his terminis demonstrationem quam de unico termino $x^n$ mox at-

attulimus exemplum ſit, poſito $q = \frac{xx}{a} + x$, ſiuè $q = \frac{xx + ax}{a}$; tùnc enìm, quantitate $\frac{aqdz}{zz}$ exiſtente $= z^{-2} lz^{2}\, dz + az^{-1}\, lzdz$, ejus integrale $\int \frac{aqdz}{zz}$ erit $\frac{-lz^{2} - 3alz - 3aa}{z}$, & quantitas $\frac{-z \int \frac{aqdz}{zz}}{a}$ erit $\frac{lz^{2} + 3alz + 3aa}{a}$; hìnc æquatio quæſitæ curvæ erit $\frac{lz^{2} + 3alz + 3aa}{a} = y$, aut $\frac{lz^{2} + 3alz + 3aa + az}{a} = y$, quarum prior per ſubſtitutionem x loco lz in algebraicam vertitur $xx + 3ax + 3aa = ay$.

## *Propoſitio VII.*

122 Conſtruximus præcedenti propoſitione ęquationem $ady = ydx - qdx$, eâdemque lege conſtruetur $ady = ydx + qdx$. Nùnc regulam univerſaliorem reddendo, conſtructionem molimur ęquationis $aady = bqdx + pydx$, ubi q, & p intelliguntur dari quomodocumque per x; apposui conſtantes aa, & b ut dimenſionum numerus ubique idem ſervetur. Pro huius æquationis reſolutione, ſivè indeterminatarum ſeparatione, cum bqdx ſit per ſe (tranſcendentèr ſaltèm) integrabilis, re-

reliquum est, ut membra $aady$, $pydx$ simùl sumpta integrabilia fiant, salua æquatione $aady = bqdx + pydx$. hoc obtinebimus dummodò pro $\frac{pdx}{a}$ ponamus $\frac{adz}{z}$, sivè $lz = \int\frac{pdx}{a}$. sic enìm $dx = \frac{aadz}{pz}$, & $pdx = \frac{aadz}{z}$. substituto igitùr pro $pdx$ ejus valore, & pro $dx$ alio etiàm ejus valore, erit æquatio $aady = \frac{bqaadz}{pz} + \frac{aaydz}{z}$ vel $\frac{zdy - ydz}{z} = \frac{bqdz}{pz}$, & $\frac{zdy - ydz}{zz} = \frac{bqdz}{pzz}$, undè integrando $\frac{y}{z} = \int\frac{bqdz}{pzz}$ vel $\frac{y}{z} \pm 1 = \int\frac{bqdz}{pzz}$, quarè vel $y = z\int\frac{\frac{bqadz}{pzz}}{a}$ vel $y = z\int\frac{\frac{bqadz}{pzz}}{a} \pm z$. Hæc æquatio jam construi potest, quia assumpta $x$ ad libitum, dabitur saltèm transcendentèr $\int\frac{pdx}{a}$ sivè $lz$; data $lz$, datur & $z$ per logarithmicam; data porrò $z$, datur $\int\frac{bqdz}{zz}$, & omnes reliquę quátitates dantur, quas æquatio continet.

123 Erit igitùr talis constructio. Assumatur arbitraria $x$, qua assumpta jàm dantur $p$, & $q$, quarum

rum utraque datur per $x$. Fiat proindè primò curva $AC$, cujus abſciſſis $AB$ exiſtentibus $x$, ſit $CB = p$. *fig. 35.* Tùm porrò ſpatio $ABC$ ubiquè per $a$ diviſo ęqualis abſcindatur $DG$ ex aſymptoto $DG$ logiſticę $EF$ ſubtangentem habentis $ED = a$; tùm ducatur applicata $GF$, quæ erit $= z$ quià ejus logarithmus $DG = \int \frac{pdx}{a}$. Tùm alia curva $HK$ conſtruatur, in qua abſciſſę quidèm $HI = DG = lz$, ordinatæ verò $IK$ ſint $\frac{abq}{pz}$; deindè fiat ut $aa$, ad ſpatium $HIK$ (quod erit $= \int \frac{aabqdz}{pzz}$) ità $z$ ad quartam $z \int \frac{bqdz}{pzz}$, quarta hæc proportionalis erit quæſita $y$, vel etiàm ſi illi addatur vel dematur $z$, fiet quæſita ordinata $y$, quę ſi applicetur in $NM$, ità ut ejus abſciſſa $LM$ ſit $= x$, erit $LN$ quæſita curva.

## *COROLL.*

124 Curva ſic deſcripta interdùm poterit eſſe algebraica. Nàm ſi $p$ ſit poteſtas quævis ipſius $x$, ut ſi fuerit $p = \frac{x^m}{a^{\overline{m-1}}}$, undè quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ fuerit $\frac{x^{\overline{m+1}}}{\overline{m+1}\,a^m} = lz$, & $x = \overline{m+1}^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}} lz^{\frac{1}{m+1}}$

fuerit autèm et unà ſimùl $q$ quævis poteſtas ipſius

ſius x, ut $q = \frac{x^n}{a^{n-1}}$, undè $= \overline{m+1}^{\frac{n}{m+1}} a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}}$, in hoc inquàm caſu $\frac{bqdz}{pzz}$ invenietur eſſe quãtitas $\frac{\overline{m+1}^{\frac{1}{m+1}} b a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} dz}{pzz}$, & ſubſtinendo pro p valorem $\overline{m+1}^{\frac{m}{m+1}} a^{\frac{1}{m+1}} lz^{\frac{m}{m+1}}$, erit etiàm $\frac{bqdz}{pzz} = \frac{\overline{m+1}^{\frac{n-m}{m+1}} b a^{\frac{m-n}{m+1}} lz^{\frac{n-m}{m+1}} dz}{zz}$, undè ejus integrale $\int \frac{bqdz}{pzz}$ invenietur (modò $\frac{n-m}{m+1}$ ſit numerus integer poſitivus) & integrale hoc, prætèr ſimplicem z, quæ erit in denominatore nullam aliam z habebit, ſed tantùm lz; hincq; fit ut hoc integrale per z multiplicatum (qui eſt valor incognitæ y) nullatenùs literam z ſit habiturum, ſed tantùm lz; pro lz verò ponendo ejus valorem $\frac{x^{m+1}}{\overline{m+1} \cdot a^m}$ erit æquatio $y = z \int \frac{bqdz}{pzz}$ purè algebraica, cum interìm alia ęquatio $y = z \int \frac{bqdz}{pzz} \pm z$ ſit tantùm tranſcendens, cum

utramque z, & lz contineat. Ad hoc igitùr ut, existentibus p, & q potestatibus ipsius x, linea descripta secundùm æquationem $aady = bqdx + pydx$ esse possit algebraica, debet exponens potestatis literæ x in quantitate q mulctatus simili exponente quantitatis p, & divisus per eundem exponentem literæ x in quantitate p unitate auctum, quotientem præbere integrum, & positivum. Sit exempli loco $n = -4$, $m = -2$, erit tùnc $\frac{a^2 bqdz}{pzz} = \frac{blz^2 dz}{zz}$, cujus integrale $\frac{-blz^2 - 2balz - 2baa}{z}$, quod integrale per aa divisum, & per z multiplicatum dabit $z \int \frac{bqdz}{pzz} = y = \frac{-blz^2 - 2balz - 2baa}{aa}$, vel etiàm $y = \frac{\pm aaz - blz^2 - 2balz - 2baa}{aa}$ proptèr y quę est $= z \int \frac{bqdz}{zz} \pm z$. Harum æquationum prior est algebraica, quia, posito pro lz ejus valore $-\frac{aa}{x}$, & pro $lz^2$, $\frac{a^4}{xx}$, ęquatio illa fiet $2bax - 2bxx - baa = xxy$.
Igitùr etiàm ęquatio $aady = bqdx + ypdx$ interdùm curvæ algebraicæ quadrare potest, dum simùl transcendentem aliam æquebenè repræsentat.

CO-

## COROLL. II.

125 Sed etiàm si q non sit una quantitatis x potestas, sed componatur ex pluribus terminis, quorum unumquemque ingrediatur x ad quamvis potestatem elevata, reperietur algebraicam posse esse lineam æquationis $aady = bqdx + ypdx$. Sit enìm q quantitas talis, qualem nunc diximus, & p potestas quævis ipsius x prorsùs ut in præcedenti Corollario, exempli gratia sit $p = \frac{x^m}{a^{m-1}}$, undè $x = \overline{m+1}^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}} lz^{\frac{1}{m+1}}$ ut suprà inventum est; q verò sit $= \frac{x^n}{a^{n-1}} + \frac{x^r}{a^{r-1}}$ &c. sicque invenietur esse $q = \overline{m+1}^{\frac{n}{m+1}} a^{\frac{1+m-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} + \overline{m+1}^{\frac{r}{m+1}} a^{\frac{1+m-r}{m+1}} lz^{\frac{r}{m+1}}$ &c. undè erit $\frac{bqdz}{pzz} = \frac{\overline{m+1}^{\frac{n}{m+1}} ba^{\frac{m+1-n}{m+1}} lz^{\frac{n}{m+1}} dz}{pzz} + \frac{\overline{m+1}^{\frac{r}{m+1}} ba^{\frac{m+1-r}{m+1}} lz^{\frac{r}{m+1}} dz \text{ \&c.}}{pzz}$ & ponendo pro p valorem $\overline{m+1}^{\frac{m}{m+1}} a^{\frac{1}{m+1}} lz^{\frac{m}{m+1}}$, fiet etiàm $\frac{bqdz}{pzz} = \frac{\overline{m+1}^{\frac{n-m}{m+1}} ba^{\frac{m-n}{m+1}} lz^{\frac{n-m}{m+1}} dz + \overline{m+1}^{\frac{r-m}{m+1}} ba^{\frac{m-r}{m+1}} lz^{\frac{r-m}{m+1}} dz}{zz}$ &c.

(nu.62.) &c. quæ etiàm quantitas erit integrabilis si $\frac{n-m}{m+1}$, $\frac{r-m}{m+1}$ &c. sint numeri integri, & positivi; cumque in hac æquatione adsit zz in denominatore sive $z^{-2}$ in numeratore, aderit in integrali $z^{-1}$, sive z in denominatore, quarè multiplicato integrali per z, evanescet z, & sola remansura est lz in quantitate $z\int\frac{bqdz}{pzz}$, quæ quantitas, vel est y (tuncq; igitùr erit y algebraica) vel erit illi addenda, demendave z ad efficiendam y, quæ tunc proindè erit transcendens. Discursus idem est quo in Coroll. præced. usi sumus. Exemp. sit quādo $m=2, r=11, n=8$; quantitas p erit $\frac{xx}{a}$, vndè $\int\frac{pdx}{a}=\frac{x^3}{3aa}$. Deindè quantitas $\frac{bqdz}{pzz}$ erit $\frac{9balz^2dz+27blz^3dz}{aazz}$, cujus

(nu.62.) integr. erit $\frac{-27blz^3-90balz^2-180baalz-180ba^3}{aaz}=\int\frac{bqdz}{pzz}$. Hoc integrale ductum in z, & divisum per a dat $\frac{-27blz^3-90balz^2\ 180baalz-180ba^3}{a^3}$, undè vel y erit æqualis huic quantitati, vel eidem additâ demptâve z, habebitur y; tunq; æquatio erit transcendens, cum tamèn nisi addatur, vel dematur z æquatio sit algebraica; substituto nempè pro

lz

lz valore $\frac{x^3}{3aa}$ erit æquatio $a^9y + x^9b + 10a^3bx^6 + 60a^6bx^3 + 180a^9b = 0$.

## COROLL. III.

126 Vidimus precedentibus duobus Corollarijs quomodo curva equationis $aady = bqdx + pydx$ possit esse algebraica, propterea quod quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ sit algebraica. Sed etiàm si hec quantitas $\int \frac{pdx}{a}$ non sit algebraica, adhùc tamèn in varijs casibus curva per præcedentem equationem indicata esse poterit algebraica; ut si fuerit $\int \frac{pdx}{a}$ quantitas simplex logarithmica, hoc est $p = aax^{-1}$ undè $\frac{pdx}{a} = \frac{adx}{x}$ & $\int \frac{pdx}{a} = lz = lx$, undè $x = z$ tùnc enim quantitas $\int \frac{\frac{baqdz}{pzz}}{a}$ erit integrabilis modò q simùl & semèl constet quotvis terminis quorum singulos x vel z ingrediatur ad quamvis potestatem elevata, & nullus sit terminus in ipsius q valore, quem z, vel x, quæ jàm unum idemque sunt, nõ ingrediatur, cum enim p sit $aaz^{-1}$, erit $pzz = aaz$ undè $\frac{baqdz}{pzz}$ erit semper, quotcumque tandèm termi-

minorum sit q, quantitas integrabilis, modò in nullo terminorum ipsam q constituentium absit quantitas z. Si autèm $\frac{baqdz}{pzz}$ est algebraicè integrabilis, erit etiàm $\frac{z\int\frac{baqdz}{pzz}}{a} \pm z$ quantitas algebraica, cum z sit ipsa x, & proindè etiàm y erit quantitas algebraica. Atque tùnc quidem nulla esse potest difficultas, siquidèm posito $p = \frac{aa}{x}$ æquatio mutatur in $aady = bqdx + \frac{aaydx}{x}$, & ducta æquatione in x, & facta transpositione $xaady - yaadx = bxqdx$, & divisio per xx, deindè facta integratione $\frac{aay}{x} = \int\frac{baqdx}{x}$, unde erit $y = \frac{x\int\frac{baqdx}{x}}{aa}$ prorsùs ut prodit per regulam hujus propositionis substituto tantùm pro p valore $\frac{aa}{x}$.

127 At si p non quidèm $\frac{aa}{x}$ supponeretur, sed $\frac{naa}{x}$, posito *n* esse numerum quemvis, esset $\frac{pdx}{a} = \frac{nadx}{x} = \frac{adz}{z}$, undè sumpto utroque logarithmo in lo-

logarithmica cujus eadem a ſit ſubtangens, erit $nlx = lz$, undè, abiectis logarithmis, $x^n = z$; undè y ſivè $z \int \frac{baqdz}{\frac{pzz}{a}} = x^n \int \frac{bqx^{-n}dx}{a}$ + vel − $x^n$, ſi libuerit. Quarè tùnc etiàm curva erit algebraica, modò q conſtet ex quotvis terminis quorum ſinguli ipſam x contineant elevatam ad quamvis poteſtatem, excepta tantummodò poteſtate cujus index ſit $n - 1$.

*Propoſitio III.*

128 ÆQuatio $b^{n+1}dy = pyb^{n-1}dx + qy^n dx$ reducetur ad æquationẽ ejuſdem formæ cum illa, quam pręcedenti propoſitione conſtruximus; ſubſtituamus enìm loco literæ y valorem $\frac{u^{\frac{1}{1-n}}}{b^{\frac{n}{1-n}}}$, & pro dy $\frac{\frac{1}{1-n} u^{\frac{n}{1-n}} du}{b^{\frac{n}{1-n}}}$, pro $y^n$ verò $\frac{u^{\frac{n}{1-n}}}{b^{\frac{nn}{1-n}}}$, & facta ſubſtitutione, diviſaq; æquatione per $u^{\frac{n}{1-n}}$ dabitur æquatio $\frac{1}{n-1} bbdu = pudx + bqdx$. Hæc æquatio eſt ejuſdem formæ ac $aady = pydx + bqdx$, quam ſupra conſtruximus, nàm quæ quantitas in æquatione prop. anteced. vocabatur a, hic eſt $\sqrt{\frac{bb}{1-n}}$

& quæ ibi erat y nùnc vocatur u, reliquis deindè denominationibus invariatis, ità ut jàm possimus hanc ęquationem construere secundum regulas ibi traditas; & postquàm construxerimus, & invenerimus quantitatem u, ad inveniendam deindè quæsitam y debet tantùm u elevatum ad potestatem $\frac{1}{1-n}$ dividi per $b^{\frac{1}{1-n}}$, quotiens enìm erit quæsita ordinata y curvæ $b^{n+1}dy = pyb^{n-1}dx + qy^n dx$.

129 Cum valor u æquationis $\frac{1}{1-n} bbdu = pudx + bqdx$ sit $z \int \frac{bqdz}{pzz}$, vel etiàm $z + z \int \frac{bqdz}{pzz}$, erit y æqualis utrivis, vel utrique harum quantitatum ad potestatem $\frac{1}{1-n}$ elevatæ, & deindè per $b^{\frac{1}{1-n}}$ divisæ.

## COROLL.

130 Quando in æquatione $b^{n+1}dy = pyb^{n-1}dx + qy^n dx$ sit p quęvis ipsius x potestas *m*, & simùl q constiterit ex quotvis terminis in quorum unoquoq; quantitas x reperiatur ad potestates elevata quarum indices *r*, *s*, &c. singuli numero *m* minuti divisibiles sint per $m+1$, & insuper *n* fuerit numerus rationalis, curva per hanc ęquationem expressa poterit esse algebraica. Facta

enim

enim ſubſtitutione, & reductione ęquationis ad ſimpliciorem $\frac{1}{1-n}\,bbdu = pudx + bqdx$, hujus ęquationis radix u valorem unum algebraicum obtinet ex ſupra viſis; quarè, ſi elevetur ad poteſtatem exponentis rationalis $\frac{1}{1-n}$ (erit autèm rationalis exponens, quotiès $n$ ſit numerus rationalis) & dividatur (n.125.)

per algebraicam quantitatem $b^{\frac{n}{1-n}}$, fiet valor unus literę y algebraicus. Secùs verò ſi utamur alio valore literę u tranſcendente, quo ad valorem ipſius y etiam tranſcendentem perducemur: ponamus exempli vice $m = 1$, ſivè $p = x$, $r$ verò $= 3$, & $s = 5$, hoc eſt $q = \frac{2bbx^3 - x^5}{4b^4}$, $n$ verò $= \frac{1}{2}$; ità æquatio $b^{n+1}dy = pyb^{n-1}dx + qy^n dx$ mutabitur in $b^{\frac{3}{2}}dy = xyb^{-\frac{1}{2}}dx + \frac{2bby^{\frac{1}{2}}x^3dx - x^5y^{\frac{1}{2}}dx}{4b^4}$; ponendo igitùr pro y valorem $\frac{uu}{b}$, ęquatio fiet $2bbdu = uxdx + \frac{2x^3bbdx - x^5dx}{4b^3}$, quę eſt æquatio ejuſdem formæ ac $aady = ypdx + qbdx$; quæ enìm hìc eſt (n.122.)
aa ibì eſt 2bb, quæ hìc y ibì u, & quæ hìc b ibì etiàm b vocatur, quæ verò hìc p, & q, ibì x, &

$\frac{2x^3bb - x^5}{4b^4}$ audiunt. Resolvamus igitùr æquationem $2bbdu = uxdx + \frac{2x^3bbdx - x^5dx}{4b^3}$; erit porrò $\int \frac{pdx}{a}$ sive $\int \frac{xdx}{\sqrt{2bb}}$ hoc est $\frac{xx}{2\sqrt{2bb}} = lz$, undè erit $x = \sqrt{2lz\sqrt{2bb}}$, & $\frac{qbdz}{pzz} = \frac{lzdz\sqrt{2bb} - 2lz^2dz}{bzz}$; quantitatis huius integrale $\int \frac{qbdz}{pzz}$ (posito logarithmos sumi in logarithmica, cuius $\sqrt{2bb}$ sit subtangens) est $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{bz}$, ac proindè $z\int \frac{qbdz}{pzz}$ erit $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{b} = u$, vel etiàm $u = \frac{bz + 2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb}{b}$. Horum valorum prior est algebraicus, substituto tantùm pro lz valore $\frac{xx}{2\sqrt{2bb}}$ fitque æquatio $\frac{x^4 + 6bbxx + 24b^4}{4b^3} = u$; cum autem $\frac{uu}{b}$ sit y æquationis propositæ, erit tandèm quæsita curvæ æquatio tantùm algebraica $y = \frac{x^8 + 84b^4x^4 + 576b^8 + 12bbx^6 + 288b^6xx}{16b^7}$; Interim si ex alio valore $\frac{2lz^2 + 3lz\sqrt{2bb} + 6bb + bz}{b}$

erua-

eruamus valorem quęſitæ y, habituri ſumus ęquat. $b^3 y = 4lz^4 + 36b^4 + bbzz + 12lz^3\sqrt{2bb} + 42lz^2 bb + 4lz^2 bz + 36lzbb\sqrt{2bb} + 6lzbz\sqrt{2bb} + 12b^3 z$ tráſcendentem curvæq; tranſcendenti inſervientem.

Exemplum hìc afferam non ſanè iniucundum, ut appareat interdùm ope hujus, & ſimilium regularum ad curvas nos deductum iri, quas algebraicas certè non exiſtimabamus, & proindè integrabiles eſſe quaſdam æquationes inveniemus quas tanquam non integrabiles antè reieceramus.

131 Fingamus nobis curvas MQ, PR eſſe parabolas quarum parametri ipſius quidèm MQ ſit AM, PR verò ſit PA, & ſic infinitæ aliæ ad eundem axem AP parabolæ intelligantur, quarum parametri reſpectivis à fixo puncto A verticum diſtantijs æquales ſint, ducenda ſit curva omnes tales parabolas ad angulos rectos ſecans. Eſto in quæſita curva punctum Q, & per illud ducta intelligatur parabola genitrix MQ ita ut MA ſit ejus parameter, & vocetur abſciſſa curvæ quæſitæ à puncto A in axe AP $= x$ & ejuſdem curvæ ordinata $= y$, itaque ejus ſubnormalis erit $= \frac{ydy}{dx}$ debet autèm proptèr normalitatem curvarum eſſe hæc ſubnormalis ipſa ſubtangens puncti Q in curva MQ, ergò, vocando MA parametrum ipſius parabolæ MQ $= u$, & reliqum abſciſſæ $= x - u$, & ejus duplum, ſubtangens ſcilicèt puncti Q in parabola MQ $= 2x - 2u$, erit hęc ſub- (fig. 9.)

 tan-

tangens $2x - 2u = -\frac{ydy}{dx}$, est autèm abscissa in parabola hoc est $x - u$ in parametrum u ducta $= yy$, ergò $xu - uu = yy$ & indè fiet $u = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$, quo valore in locum u substituto in æquatione $-\frac{ydy}{dx} = 2x - 2u$ superiùs inventa, erit $-\frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$ æquatio pro curva quæsita, quam quidèm, si integrabilis esset, integraremus utiquè, & curvam quæsitam purè algebraicam erueremus. Verùm non constat esse integrabilem, nec qua via possint indeterminatæ cum suis differentialibus ab invicèm separari, qua propter ad tollenda signa radicalia pono $\frac{1}{4}xx - yy$ esse quadratum, & invenio $x = \frac{tt + yy}{t}$, & $\sqrt{\frac{1}{4}xx - yy} = \frac{yy - tt}{2t}$, undè æquatio proposita mutabitur in hanc pro curva quæsita æquationem $2ttdt + 5tydy - 2yydt = 0$ & $dy = \frac{2}{5}t^{-1}ydt - \frac{2}{5}ty^{-1}dt$; in

(n.128) qua si pro y ponamus $\sqrt{r}$ & pro dy ponamus $\frac{dr}{2\sqrt{r}}$ fiet æquatio $dr = -\frac{4}{5}tdt + \frac{4}{5}t^{-1}rdt$

eius-ejuſdem formæ ac ſuperiùs hac propoſitione conſiderata æquatio $aady = bqdx + pydx$, quæ enìm in æquatione canonica eſt $aa$ hìc eſt $= 1$, quæ ibi eſt $y$ hìc eſt $= r$, quæ ibì $= b$ hìc $= 1$, quæ ibì $x$ hìc eſt $= t$, quæ ibì $q$ hìc eſt $= -\frac{4}{5}t$, & quæ tandèm ibì eſt $= p$ hìc eſt $= \frac{4}{5}t^{-1}$. Itaque, ſi ponamus $\frac{pdx}{a} = \frac{adz}{z}$, ſivè $\frac{4}{5}t^{-1}dt = \frac{dz}{z}$, ſivè $\frac{4}{5}lt = lz$ in ſubtangente $1$, invenietur, abiectis logarithmis, $t^{\frac{4}{5}} = z$, & $dz = \frac{4}{5}t^{-\frac{1}{5}}dt$. Eſt autèm in æquatione $aady = bqdx + pydx$ quantitas $y = z\int \frac{bqadz}{\frac{pzz}{a}}$, vel $y = z\int \frac{bqadz}{\frac{pzz}{a}} \pm z$, ergò, ſi pro $z$ & $dz$ ſubſtituas valores mòx aſsignatos, & deindè pro $a$, $b$, $q$, & $p$ etiàm ſuos valores, habebis $r$ in æquatione $dr = -\frac{4}{5}tdt + \frac{4}{5}t^{-1}rdt = t^{\frac{4}{5}}\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt$ vel $= t^{\frac{4}{5}}\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt \pm t^{\frac{4}{5}}$; eſt autèm $\int -\frac{4}{5}t^{\frac{1}{5}}dt$

$= a$

(n.122.)

$= a^{\frac{6}{5}} - \frac{2}{3} t^{\frac{6}{5}}$ (addita constante ad lubitum $a^{\frac{6}{5}}$)

itaq; hoc integrali in $t^{\frac{4}{5}}$ ducto, fiet $r = a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt$.

Hic additio ipsius z, vel $t^{\frac{4}{5}}$ esset frustranea cum solum membrum $a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}}$ posit augere. Inventa itaque $r$, ad habendam y erit opus ipsius $r$, seù $a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt$ radicem eruere, eritque hæc radix $y = \sqrt{a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt}$, & cum sit $x = \frac{tt + yy}{t}$, invenietur $x = a^{\frac{6}{5}} t^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} t$; itaq; assumpta t ad libitum, & abscissa quantitate $x = a^{\frac{6}{5}} t^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{3} t$ si fiat $y = \sqrt{a^{\frac{6}{5}} t^{\frac{4}{5}} - \frac{2}{3} tt}$ erit punctum in optata curva, & si rem syntheticè nùnc experiamur inveniemus curvam sic constructam habere suam subnormalem æqualem subtangenti parabolæ genitricis MQ. Quod si ex æquat. $x = \frac{tt + yy}{t}$ eruatur valor $t = \frac{1}{2} x + \sqrt{\frac{1}{4}xx - yy}$, & hìc deindè substituatur ritè in ęquatione $x = a^{\frac{6}{5}} t^{-\frac{1}{5}} + \frac{1}{5} t$ fiet æquatio pro curva quæsita algebraica quidèm eritque factis debitis præparationibus, & operationibus

$$\overline{\frac{5}{2} x - \sqrt{\tfrac{1}{4} xx - yy}} : \sqrt[5]{\tfrac{1}{2} a^4 x + a^4 \sqrt{\tfrac{1}{4} xx - yy}} = aa.$$

Cum verò superiùs invenerimus hujus curvæ ęquationem differentialem esse $- \frac{ydy}{dx} = x - 2\sqrt{\frac{1}{4} xx - yy}$ sequitur hanc ęquationem, si integretur, restituere illam quam modo invenerimus, quod si experiamur, differentiando superiùs allatam, inveniemus optimè succedere, quarè patet, & ęquationem $aady = bqdx + pydx$ interdùm curvam tantùm algebraicam repręsentare, nullam simùl admittens transcendentem, quę satisfaciat quæsito.

*F I N I S.*

DD.

*DD. Rondellus, & Verzalia præsentis Operis* de Constructione Æquationum differentialium primi gradus *in Philosophica Inquietorum Academia Censores electi, omnia in ipso contenta ejusdem Academiæ legibus, atque Institutis conformia esse retulerunt.*

V. F. Stancarius à Secretis.

V. D. Franciſcus Aloyſius Barelli Cler. Reg. Cong. S. Pauli, & in Metropol. Bononien. Pœnitentiarius prò Eminentiſſimo, & Reverendiſsimo Dom. D. Cardinali Iacobo Boncompagno Archiepiſcopo, & Principe.

CUm ego infraſcriptus Sanctiſsimæ Inquiſitionis Reviſor Ordinarius legerim librum inſcriptum *De Conſtructione Æquationum differentialium primi gradus, Authore Gabriele Manfredio*, ipſumque obſervaverim dumtaxat firmam, perutilemque ſcientiam continere, hac de cauſa publici juris fieri poſſe dijudicavi.

Hiemynianus Rondelli.

Stante præfata Atteſtatione

Imprimatur.

F. Antonius Leonius Inquiſitor Bononiæ.

## *Monitum ad Lectorem.*

Pag. 166. lin. 23. in quantitate $\frac{ndx\sqrt{xx-yy}+xdy-ydy}{\sqrt{xx-yy}}$ pro termino xdy lege xdx. Reliqua Ortographica vel alius generis ſphalmata benignus Lector facilè, ut puto, advertet, corriget, atque ignoſcet.

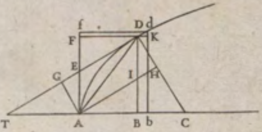
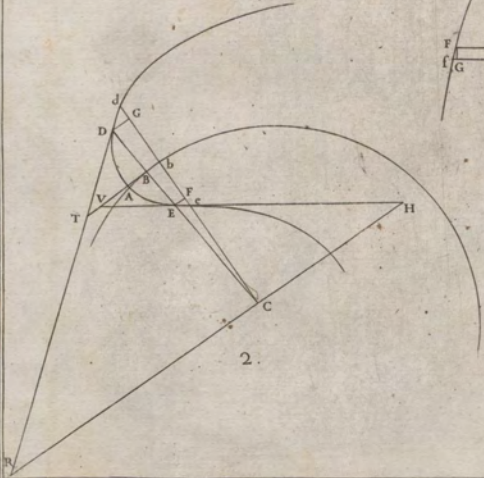
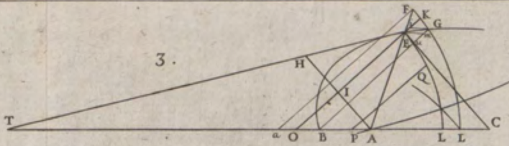

f D d
F K
G E I H
T A B b C

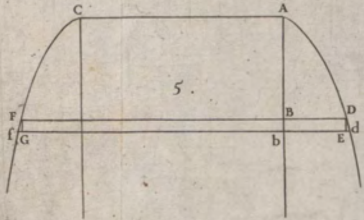
fig. 1.


d G
D
b
B
V A F e
T E H
C
R

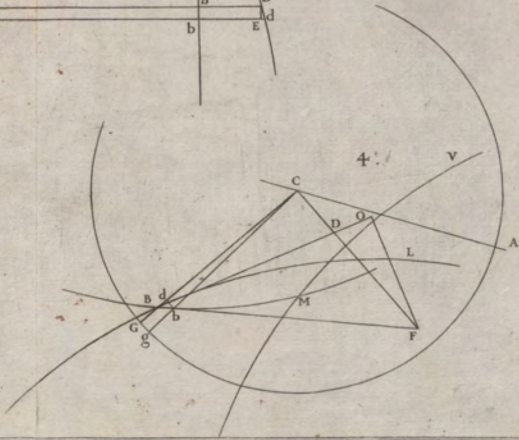
2.


F K G
H
I
Q
T C
a O B P A L L

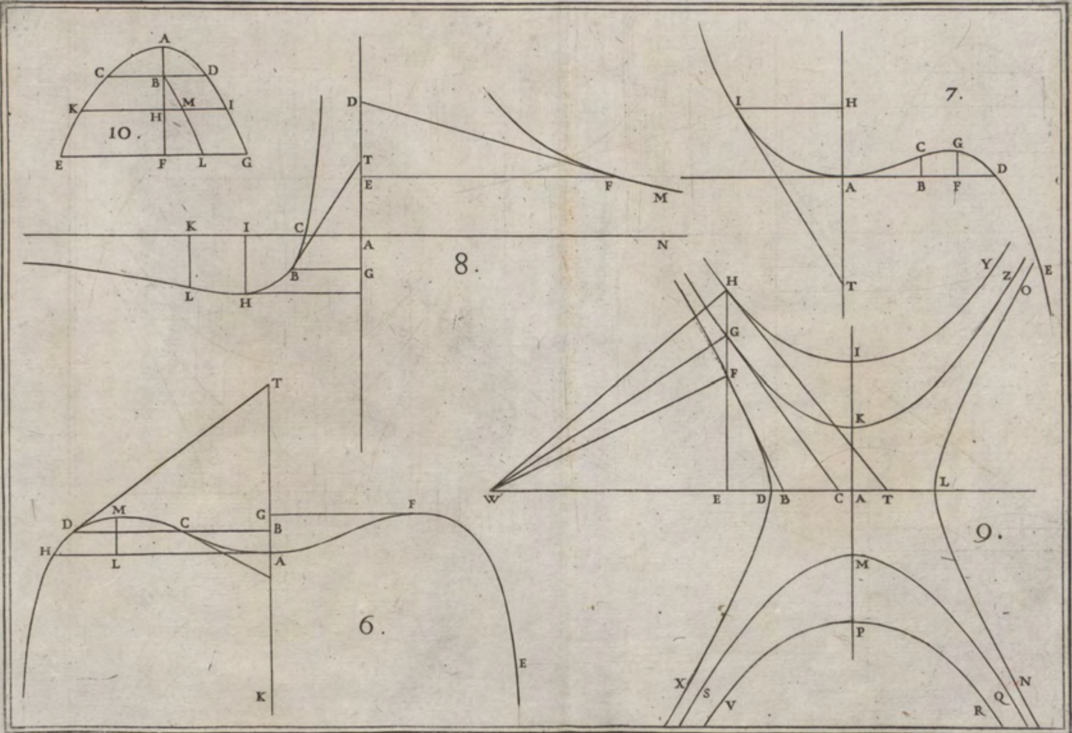
3.


C A
F B D
f G b E d

5.

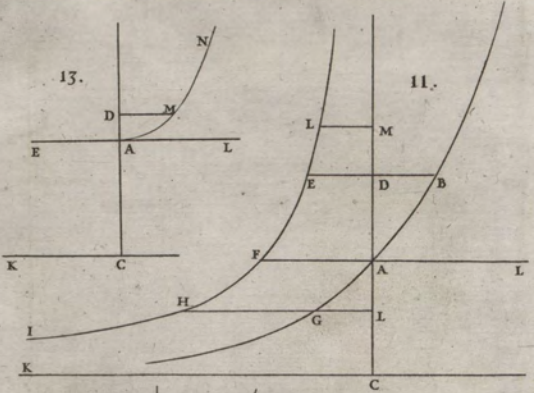

V
C
D O A
L
B d M
b
G F
g

4.

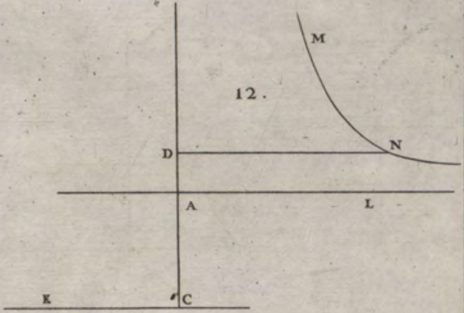


10.
A C D B K M I H E F L G
8.
D T E F M K I C A N B G L H
7.
I H C G D A B F T E
9.
H G F I K Y Z O W E D B C A T L M P X S V R Q N
6.
T D M C G B F H L A E K

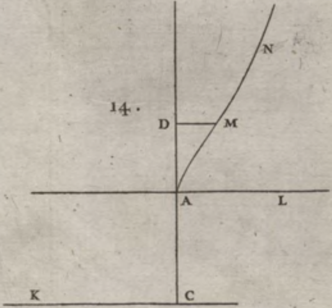
13.


N
D
M
E
A
L
K
C
11.
L
M
E
D
B
F
A
L
H
G
L
I
K
C

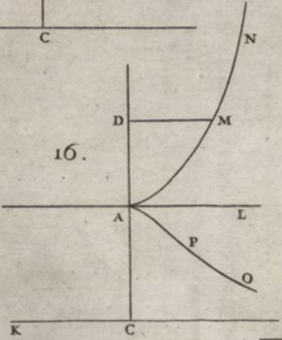
12.


M
D
N
A
L
K
C

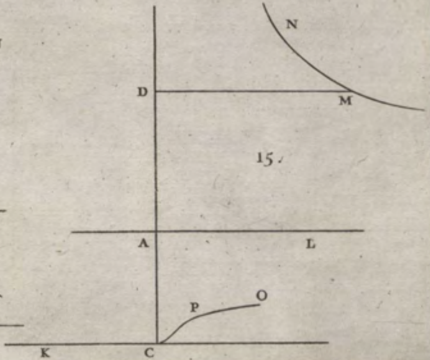
14.


N
D
M
A
L
K
C

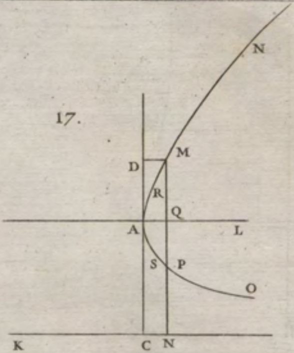
16.


N
D
M
A
L
P
O
K
C

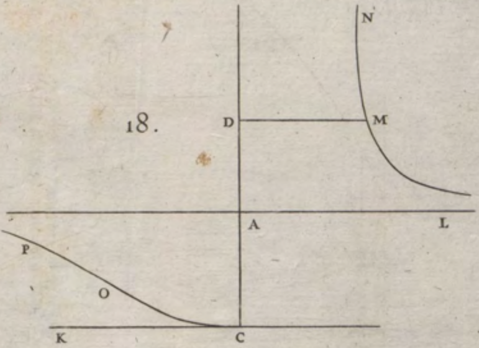
15.


N
D
M
A
L
P
O
K
C

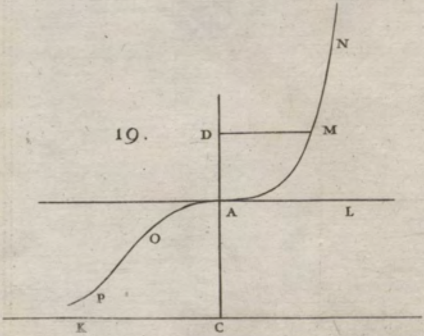
17.



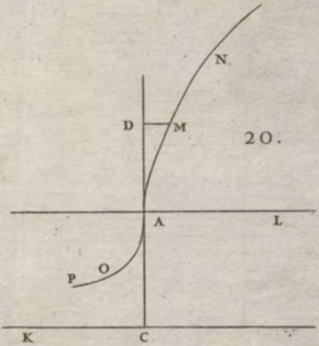

18.

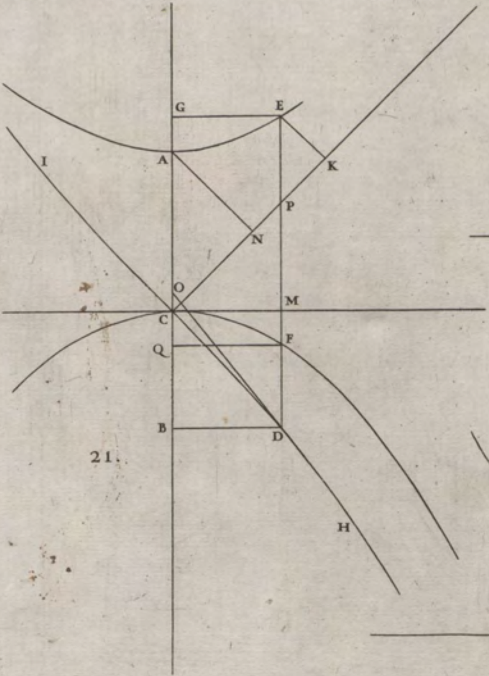



19.

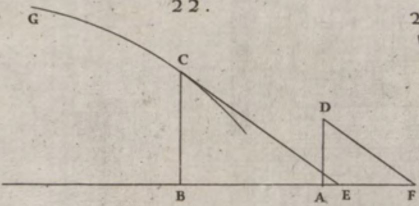



20.

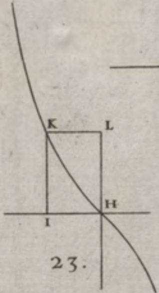




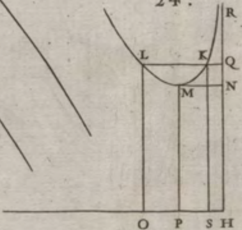

21.



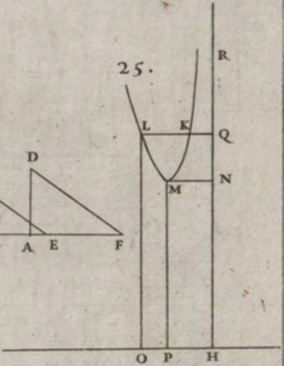

22.



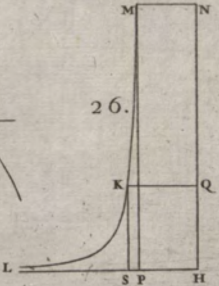

23.



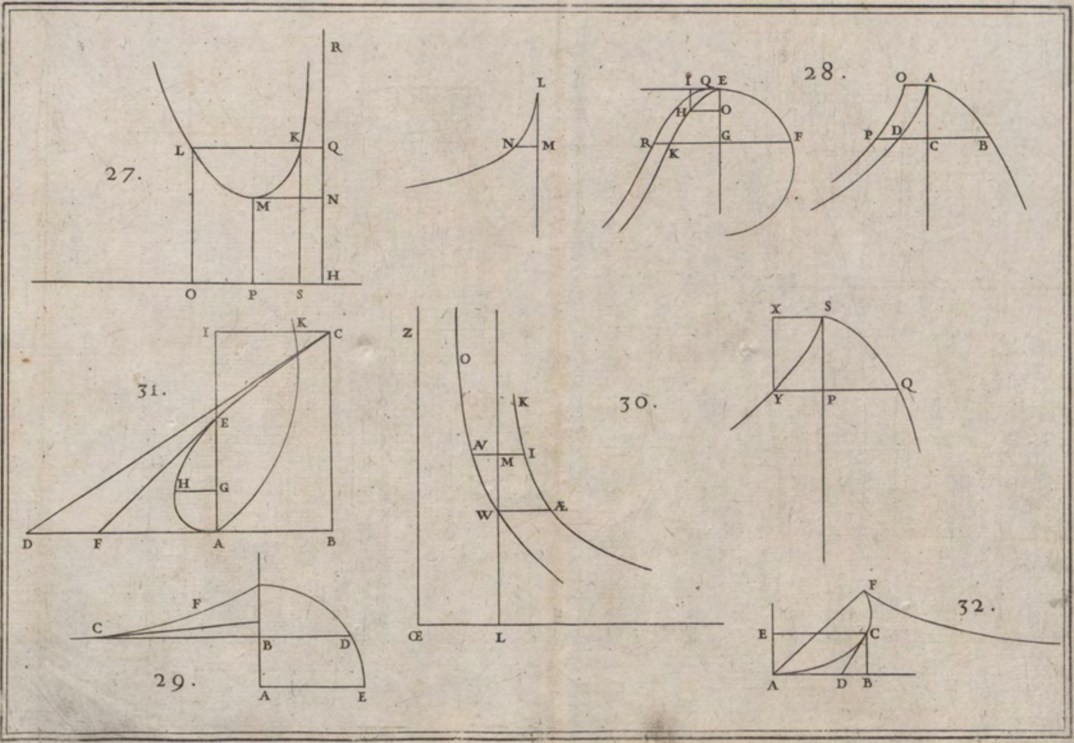

24.



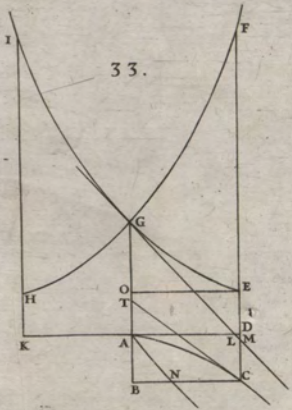

25.



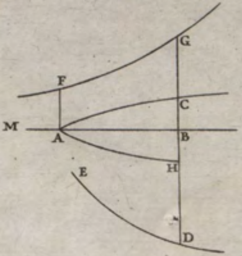

26.


27.
R
K
L
Q
M
N
H
O
P
S
L
N
M
28.
I Q E
H
O
R
G
F
K
O
A
P
D
C
B
31.
I
K
C
E
H
G
D
F
A
B
Z
O
K
N
I
M
W
Æ
Œ
L
30.
X
S
Q
Y
P
29.
F
C
B
D
A
E
F
32.
E
C
A
D
B

33.




34.




35.